# Note de lecture, UE 902 EC 5*

Léo Vacher

2022

## 1 Introduction

Nous proposons ici une courte analyse de (Ladyman 2005), discutant le problème de l'identité des indiscernables dans le cadre du structuralisme en philosophie des mathématiques. En section 2, nous commencerons par une mise en contexte générale, introduisant les motivations pour l'apparition du structuralisme en philosophie contemporaine des mathématiques, les réponses qu'il propose ainsi que les problématiques auxquelles il doit faire face. Nous procéderons ensuite en section 3 à une analyse détaillée de (Ladyman 2005) et de la problématique qu'il soulève. Finalement, en section 4, nous confronterons la position de l'auteur aux réponses qui lui ont été adressées dans la littérature. Nous verrons alors ses limites et les alternatives pouvant être proposées. La section 5 regroupe un ensemble de définitions supplémentaires nécessaires à la compréhension de l'analyse qui auraient trop alourdis la discussion si placée dans le corps du texte.

## 2 Mise en contexte

On peut considérer que l'idée de structuralisme mathématique a été introduite pour répondre à deux problématiques introduites dans la seconde moitié du XX$^{eme}$ siècle par le philosophe Paul Benacerraf.

Premièrement, (Benacerraf 1973) souligne que, pour être consistante, il est impératif de demander à toute ontologie des mathématiques de fournir conjointement

- une théorie sémantique uniforme pour les propositions mathématiques et le reste du langage, garantissant que les symboles mathématiques obéissent aux règles et aux intuitions que l'on en a
- et une épistémologie plausible ou raisonnable justifiant comment l'esprit humain peut avoir accès à la connaissance des objets mathématiques.

On parle du **Dilemme de Benacerraf**. Le Platonisme traditionnel, statuant le réalisme des objets mathématiques, fournit une théorie sémantique claire, mais peine à fournir une épistémologie crédible, aucun lien causal ne semblant pouvoir être établi entre réalité mathématique et connaissance humaine.

Deuxièmement, Benaceraff argumente qu'une interprétation réaliste des nombres est impossible d'après la théorie des ensembles (Benacerraf 1984). En effet, il existe différentes manières de définir les nombres naturels $\mathbb{N}$ à partir d'ensembles contenants l'ensemble vide. Toutes retrouvent identiquement les propriétés arithmétiques de $\mathbb{N}$ mais ne donnent pas la même valeur de vérité à des propositions telles que $1 \in 3$ et ne sont donc pas équivalentes. Comment alors réifier des objets qui peuvent avoir des propriétés différentes selon leur définition ? La position Platoniste devient donc de plus en plus intenable.

*Pour toute requête, contacter vacher.leo.etu@gmail.com

Le structuralisme propose de penser les objets mathématiques comme des positions dans des **structures**, définis par les relations qu'ils entretiennent entre eux. Ils sont ainsi vide de réalité intrinsèque. Définir formellement ce qu'est une structure et ce que sont des propriétés structurales, au-delà de l'intuition, est loin d'être trivial (voir à ce sujet (Korbmacher and Schiemer 2018)). Nous suivrons ici (Keranen 2001), en définissant une **structure** comme une paire $\{D, \mathcal{R}\}$ où $D$ est un ensemble d'emplacements et $\mathcal{R}$ est un ensemble de relations entre les emplacements. Il s'agit là de la définition la plus courante, fondée sur la théorie des ensembles. On parle de 'structure de Bourbaki'.

Partant de ce point de départ commun, les structuralismes en mathématiques sont pluriels et encore mouvants, ce définissants au fil des débats (voir e.g. (Hellman 2001)). Tous n'accordent pas la même ontologie à la notion de structure, proposant ainsi différents compromis face au dilemme de Benacerraf.

La position réaliste ou "ante-rem", principalement introduite par (Shapiro 1997) et (Resnik 1997) adopte une position réaliste vis à vis des structures. Celles-ci deviennent alors les seules entités ontologiquement pertinentes, les positions seules n'ayant aucune réalité "absolues", indépendamment des relations qu'elles entretiennent entre elles. La position sémantique est donc très claire. Le problème des nombres naturels est résolu : ceux-ci n'existent pas "en soi" mais seulement en relation entre eux : 2 se trouve entre 1 et 3 vis à vis de la relation '+'. Le réalisme du Platonisme se voit donc déplacé des objets vers les structures. La position épistémologique associée, plus complexe, est encore sujet à débats. Elle invoque des processus neurologiques et psychologiques comme la cognition des formes (pattern cognition) (voir e.g. (Hale 1996) et (Gelderblom 2020)).

Seule cette version du structuralisme sera discutée dans le présent essai. De nombreuses questions sur les fondations du structuralisme ante-rem sont encore vivement discutés et nous renvoyons le lecteur à (Horsten 2022) et (Reck and Schiemer 2020) pour une présentation plus détaillée.

Un des défis majeurs consiste à savoir comment traiter les objets indistinguables au sein du structuralisme ante-rem. En effet, maintenir que les relations suffisent à définir les objets mathématiques amène au problème suivant : comment distinguer deux objets pourtant différents qui partagent les mêmes relations avec toutes des positions de l'ensemble duquel ils font partie ? C'est cette question centrale devant être fixée par la définition d'un **principe de l'identité des indiscernables (PII)** qui sera l'objet de notre discussion.

# 3 Analyse

L'article Ladyman 2005 présente une discussion de la validité du PII dans le cadre du structuralisme ante-rem déjà présenté en section 2. Comme nous l'avions évoqué, il s'agit là d'une difficulté bien connue lorsque l'on essaye de tenir une position réaliste concernant les structures.

Commençons par bien comprendre le principe en question en nous basant sur (Forrest 2020) et (Keranen 2001). Une discussion complète peut également être trouvée dans (Ladyman, Linnebo, and Pettigrew 2012) et (Ketland 2011). Soit $\mathcal{E}$ un ensemble contenant des objets pouvant posséder un ensemble de propriétés $\Phi$. Le PII permet de définir l'égalité entre deux objets $x \in \mathcal{E}$ et $y \in \mathcal{E}$ et s'énonce de la façon suivante : si $x$ et $y$ partagent toutes leurs propriétés $\phi \in \Phi$, alors il s'agit du même objet. Plus formellement,

$$\forall \phi \in \Phi \, (\phi(x) \Leftrightarrow \phi(y)) \Rightarrow x = y \, . \tag{1}$$

L'origine de ce principe est attribuée à G.W. Leibniz (Leibniz 1714), qui en tira la conséquence forte que deux objets différents ne peuvent, factuellement, pas posséder les mêmes propriétés. Il en tirera les conséquences métaphysiques dans sa théorie des monades. Même si sujet à de nombreux débats, le PII est majoritairement considéré comme un élément fondateur nécessaire à toute théorie logico-mathématique consistante.

Dans la relation 1, on distinguera les propriétés $\phi$ qui sont dites **générales** et peuvent être possédés par plusieurs objets (e.g. "être bleu") de l'**Eccéité** (Haecceity), une propriété ne pouvant être possédée que par une seule et unique objet. En cela l'eccéité traduit "l'individualité" ou la "ceci-ité" (thisness) d'un objet.

Pour conserver le point de vue structuraliste déclarant que les objets mathématiques sont entièrement définis par leurs propriétés générales relationnelles, seules celles-ci doivent être considérées dans $\Phi$. Les propriétés relationnelles de $x$, $\phi(x)$ sont définies uniquement à partir des relations que $x$ (variable du premier ordre) doit respecter vis à vis des autres éléments de l'ensemble respectivement aux opérations définies sur les ensembles ($\circ$,+,$\times$ ...) qui lient les objets entre eux ($\phi(x)$ est alors une variable du second ordre définissant les propriétés dites **intra-structurelles**). Ainsi, on pourra affirmer que deux objets ou "emplacements" sont identiques si ils possèdent les mêmes relations avec l'ensemble des autres objets de la structure. Nous appellerons cette restriction du PII aux propriétés relationnelles, le **PII relationnel (PIIR)**.

Malheureusement, une telle restriction du choix de $\Phi$ pour l'identification devient immédiatement problématique. En effet, considérant par exemple le groupe des entiers relatifs $(\mathbb{Z}, +)$, le PIIR nous force à conclure que $-1 = +1$, les deux nombres possédant les mêmes propriétés intra-structurelles vis à vis de l'unique relation $+$. Cela conduit donc inévitablement à des contradictions. En effet, on a alors $1+1 = 1+(-1) \Leftrightarrow 2 = 0$, alors que Eq. 1 nous conduit immédiatement au résultat opposé $2 \neq 0$ car 2 et 0 n'ont pas les mêmes propriétés intra-structurelles.

Les structures mathématiques peuvent donc contenir des emplacements à priori différents, qui sont indiscernables si individualisés uniquement par les relations qu'ils ont entre eux. Il s'agit là du **problème de l'identité** dans le structuralisme ante-rem, premièrement identifié par (Burgess 1999) puis discuté par (Keranen 2001), (MacBride 2005) et (Parsons 2004), les amenant à un rejet catégorique du réalisme ante-Rem. La discussion ouverte par (Ladyman 2005) s'inscrit alors dans ce débat, comme une réponse aux travaux précédents, visant à sauver le structuralisme réaliste.

En toutes généralité, le problème de l'identité apparaît pour toute structure dite **non rigide**, c'est à dire admettant un ou plusieurs automorphismes autres que l'automorphisme trivial (voir section 5). Un tel automorphisme va alors préserver les relations entre toutes les positions de la structure, mais changer les objets associés aux positions, rendant problématique leur identification. C'est le cas par exemple, de $(\mathbb{Z}, +)$ avec l'automorphisme $x \to -x$ déjà évoqué. Similairement, la conjugaison $z = x + iy \to \bar{z} = x - iy$ est un automorphisme sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. Le PIIR nous conduisant donc à conclure que $i = -i$. Ce dernier exemple, originellement proposé par (Burgess 1999), est un fil conducteur dans la discussion sur la consistance du structuralisme et est également naturellement repris pour la discussion de (Ladyman 2005). D'autre exemples plus sophistiqués de structure non rigide peuvent être imaginés comme celui de deux points dans l'espace Euclidien séparés par une distance $d$ sous l'automorphisme des translations rigides (déjà mentionné dans Burgess 1999) ou le cas d'école philosophique donnée par l'exemple de deux sphères identiques séparées par un miles dans l'espace vide Black 1952, invariant sous l'automorphisme des permutations. On constate bien qu'il ne s'agit pas là d'exemples singuliers mais bien de structures omniprésentes et centrales dans la pratique mathématique et physique.

Le problème de l'identité justifie alors le slogan inventé par (MacBride 2005) : le structuralisme réaliste munit du PIIR tel que définit plus haut est "ou une vieille nouvelle ou une mauvaise nouvelle". En effet, il nous force, ou à accepter que des objets apparemment distincts mais indiscernables sont identiques, en contradiction directe avec l'usage des mathématiques et la sémantique uniforme ("mauvaise nouvelle") ou qu'ils diffèrent uniquement en terme d'eccéité, i.e. par une propriété non relationnelle qui les rends uniques, position alors apparemment équivalente au Platonisme ("vieille nouvelle").

Ladyman propose cependant une porte de sortie. Pour cela il commence par rappeler une distinction importante entre différent types de discernabilités, permettant de relâcher la contrainte trop forte imposée par le PIIR. Comme dans (Quine 1960) et (Quine 1976), nous distinguerons alors :

- **La discernabilité absolue** : deux objets $x$ et $y$ sont absolument discernable si et seulement si il existe une propriété $\phi$ qui soit vraie pour $x$ mais fausse pour un $y$. Autrement dit:

$$\exists\phi \in \Phi \text{ tel que } \neg(\phi(x) \Leftrightarrow \phi(y)) \;\Rightarrow x \neq y\,. \tag{2}$$

  Il s'agit en fait là d'une reformulation du PII décrit par l'équation 1.

- **La discernabilité relative** : deux objets $x$ et $y$ sont relativement discernables si et seulement si il existe une relation binaire asymétrique $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{S}(x,y)$ (voir section 5). Différents instants $t_1$ et $t_2$ sont par exemple relativement discernables par une relation d'ordre stricte e.g. $\mathcal{S}(t_1,t_2) \Leftrightarrow t_1 > t_2$.

- **La discernabilité faible** : deux objets $x$ et $y$ sont faiblement discernables si et seulement si il existe une relation binaire irréflexive telle que $\mathcal{R}(x,y)$.

En considérant la relation irréflexive $\text{Inv}^+(x,y) : x+y=0$, soit "$x$ est l'inverse additif de $y$", Ladymann fait ainsi remarquer que les paires $(i,-i) \in \mathbb{C}$ ou $(1,-1) \in (\mathbb{Z},+)$ sont faiblement discernables car $\text{Inv}^+(i,-i)$ et $\text{Inv}^+(1,-1)$. De même, la relation métrique $g(x,y) = d$, rends faiblement discernable les points $x$ et $y$ de l'espace Euclidien.

Ladyman suggère donc de remplacer le PIIR par le **principe d'identification faible (PIIF)** comme fondation du structuralisme réaliste, résolvant ainsi le problème de l'identité.

On pourrait lui reprocher qu'un tel choix est arbitraire, simplement proposé pour sauver le structuralisme de l'abîme. L'auteur répond à cela que préférer une discernabilité faible semble au contraire justifié par les sciences de la nature. En effet, d'après (Saunders 2003), les fermions semblent obéir uniquement au PIIF. Il en est de même pour les différents points de l'espace-temps en physique relativiste (à ce sujet, voir le plus récent (Dieks 2010)). Si les objets physiques doivent respecter le PIIF, on ne saurait reprocher qu'il en soit de même pour les objets mathématiques, mais au contraire l'encourager.

# 4 Commentaire

Aussi convainquant et élégant que soit l'argumentaire de Ladyman, il semble cependant échouer dans des cas particuliers. En effet, comme le discutent (Button 2006) puis (Shapiro 2008), on peut penser à des exemples hautement symétriques ayant peu ou pas de relations, présentant toujours le problème de l'identité, même en considérant le PIIF. Prenons par exemple un ensemble de cardinal 4 sans aucune relation : sans relation à préserver, toute bijection imaginable est un automorphisme. Le PIIR nous amènerait à identifier les quatre emplacements, et aucune relation irréfléxive ne peut venir nous sauver pour invoquer le PIIF. De nombreux exemples peuvent être trouvé dans la théorie des graphes (l'exemple de l'ensemble de cardinal 4 est en fait équivalent à un graphe contenant 4 noeuds sans lien). En physique, une description similaire correspondrait à un système composé de bosons. Suivant (Ladyman, Linnebo, and Pettigrew 2012), nous appellerons **absolument indiscernable** les objets appartenant à de telles structures.

Face à cela, (Button 2006) propose une solution "hybride", demandant une interprétation ontologique différente selon que la structure contienne ou non des objets absolument indiscernables. Le structuralisme ante-rem munit du PIIF fonctionnerait pour la majorité des structures (dites "basiques"), mais échouerait pour les structures contenant des "indistinguables distincts" (dites "construites"). Pour ces dernières, une approche éliminativiste - i.e. non réaliste - serait requise.

Ladyman reviendra sur ces exemples aux côtés de Leitgeb dans (Leitgeb and Ladyman 2007). Les auteurs concluront que l'identification des emplacements dans telle une structure ne peut pas être déterminé par autre chose que la structure elle-même e.g. le graphe lui-même. En effet, par définition, un graphe peut contenir $N$ noeuds indistinguables, et, sans aucune autre structure, on ne peut donc rien demander de plus pour prouver qu'il y a bien

$N$ éléments distincts, structuralisme ou non. On ne peut donc pas demander un PII pour des objets absolument indiscernables. Même si une telle réponse peut sembler être une esquive, elle correspond bien à la pratique et à l'intuition du mathématicien. Selon les auteurs, la pratique mathématique devrait être un guide philosophique bien plus important que les présupposés métaphysiques.

Dans le même esprit, (Shapiro 2008) et (Ketland 2006), argumentent contre la nécessité d'introduire une forme de PII pour les positions dans les structures. Lorsque la structure est complètement symétrique, seul importe le nombre d'objets impliqués sans qu'il ne soit nécessaire/possible de les distinguer, renonçant ainsi à la notion d'eccéité et à la nécessité de définir un PII pour le structuralisme ante-rem. Cet argument, très proche de celui de Leitgeb and Ladyman 2007, est en fait très sensé : pourquoi voudrait-on distinguer des objets indistinguables ? Pour (Shapiro 2008), dans le cas des structures non rigide comme $\mathbb{C}$, l'axiomatisation de la structure elle-même implique l'existence de deux solutions à l'équation $z = \sqrt{-1}$. Cela est complètement suffisant, et aucune condition d'individualisation supplémentaire n'est nécessaire. En appeler une '$i$' et l'autre '$-i$', n'est qu'une question de convention (Shapiro compare cet acte à un baptême). Plus techniquement, les indistinguables sont compris comme des termes de Skolem 'b', incarnation abstraite d'un objet satisfaisant une propriété (e.g. $(\exists x)\phi(x)$, dont on peut déduire $\phi(b)$, sans avoir à spécifier $b$) dans le processus d'*élimination existentielle* de la déduction naturelle (voir e.g. (Moerdijk Ieke 2018)). $i$ peut ainsi être compris comme l'un des terme de Skolem satisfaisant la propriété axiomatique $(\exists x)(x^2 = -1)$. Nécessairement, il existe alors une seconde et unique solution satisfaisant cette propriété : $-i$.

Cependant, renoncer au PII à la manière des structuralistes peut être interprété comme une "non réponse" aux arguments de (Burgess 1999) ou (Keranen 2001) conduisant en quelque sorte à une "impasse métaphysique" , dans laquelle les deux camps restent sur leurs positions ("metaphysical standoff" d'après (Shapiro 2008)). Il est d'ailleurs clair que l'argument n'a pas convaincu de nombreux auteurs (voir e.g. (Assadian 2018)), et que le sujet est loin d'être clos.

Il devient alors urgent de proposer des solutions alternatives tentant de réconcilier plus explicitement structuralisme et PII. S'appuyant sur (Bermúdez 2007), (Menzel 2018) propose un traitement l'eccéité comme propriété structurelle de manière à ce que le structuralisme de ce réduise pas au Platonisme. Si il n'offre pas une réponse ultime à ce débat, ce dernier travail nous amène à nous (re)poser la question centrale suivante : qu'entend t-on vraiment par propriété structurelle/relationnelle ? (voir (Korbmacher and Schiemer 2018)).

L'impact et l'importance des débats précédents sur le PII et les fondations du structuralisme dépassent largement le cadre de la philosophie des mathématiques. Comme nous l'avons déjà effleuré dans le présent essai, la notion de distinguabilité est aujourd'hui également centrale en physique (notamment statistique, relativiste et quantique, voir e.g. (French 2019)) et de nombreuses approches structuralistes des sciences physiques ont également été proposées (voir (Schmidt 2019)). Plus largement encore, une métaphysique basée sur les relations est proposée par le réalisme structurale (voir e.g. (Bitbol 2010) et (Ladyman 2020)). Tous ces structuralismes présentent inévitablement des similitudes fortes avec le structuralisme mathématique et font face à des problématiques similaires. Quelle que soit sa forme, le structuralisme doit donc pouvoir justifier comment il souhaite, ou non, individualiser les indiscernables.

## References

Assadian, Bahram (2018). "The Semantic Plights of the Ante-Rem Structuralist". In: *Philosophical Studies* 175.12, pp. 1–20. DOI: 10.1007/s11098-017-1001-7.

Benacerraf, Paul (1973). "Mathematical Truth". In: *The Journal of Philosophy* 70.19, pp. 661–679. ISSN: 0022362X. URL: http://www.jstor.org/stable/2025075 (visited on 05/07/2022).

— (1984). "What numbers could not be". In: *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Ed. by Paul Benacerraf and HilaryEditors Putnam. 2nd ed. Cambridge University Press, pp. 272–294. DOI: 10.1017/CBO9781139171519.015.

Bermúdez, José Luis (2007). "Indistinguishable Elements and Mathematical Structuralism". In: *Analysis* 67.2, pp. 112–116. DOI: 10.1111/j.1467-8284.2007.00659.x.

Bitbol, Michel (2010). *De l'intérieur du Monde : Pour une philosophie et une science des relation*. Flammarion.

Black, Max (1952). "The Identity of Indiscernibles". In: *Mind* 61.242, pp. 153–164. DOI: 10.1093/mind/LXI.242.153.

Burgess, John P. (1999). "Book Review: Stewart Shapiro. Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology." In: *Notre Dame Journal of Formal Logic* 40.2, pp. 283–291. DOI: 10.1305/ndjfl/1038949543. URL: https://doi.org/10.1305/ndjfl/1038949543.

Button, Tim (2006). "Realistic Structuralism's Identity Crisis: A Hybrid Solution". In: *Analysis* 66.3, pp. 216–222. DOI: 10.1111/j.1467-8284.2006.00617.x.

Dieks, Dennis (Nov. 2010). *Weak discernability and the identity of spacetime points*. In revised form chapter in: ?Space and Time: A Priori and A Posteriori Studies?, deGruyter, 2014; Vincenzo Fano, Francesco Orilia and Giovanni Macchia (Eds.). ISBN 978-3-11-034549-0, ISBN of e-book 978-3-11-034892-7. URL: http://philsci-archive.pitt.edu/10676/.

Forrest, Peter (2020). "The Identity of Indiscernibles". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. by Edward N. Zalta. Winter 2020. Metaphysics Research Lab, Stanford University.

French, Steven (2019). "Identity and Individuality in Quantum Theory". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. by Edward N. Zalta. Winter 2019. Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Gelderblom, M.H. (2020). "A first step in the AI implementation of pattern recognition as a solution to the access problem for non-eliminative structuralism". In.

Hale, Bob (May 1996). "Structuralism's Unpaid Epistemological Debts". In: *Philosophia Mathematica* 4.2, pp. 124–147. ISSN: 0031-8019. DOI: 10.1093/philmat/4.2.124. eprint: https://academic.oup.com/philmat/article-pdf/4/2/124/21430683/4-2-124.pdf. URL: https://doi.org/10.1093/philmat/4.2.124.

Hellman, Geoffrey (June 2001). "Three Varieties of Mathematical Structuralism". In: *Philosophia Mathematica* 9. DOI: 10.1093/philmat/9.2.184.

Horsten, Leon (2022). "Philosophy of Mathematics". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. by Edward N. Zalta. Spring 2022. Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Keranen, J. (2001). "The Identity Problem for Realist Structuralism". In: *Philosophia Mathematica* 9.3, pp. 308–330. DOI: 10.1093/philmat/9.3.308.

Ketland, Jeffrey (2011). "IDENTITY AND INDISCERNIBILITY". In: *The Review of Symbolic Logic* 4.2, pp. 171–185. DOI: 10.1017/S1755020310000328.

— (2006). "Structuralism and the Identity of Indiscernibles". In: *Analysis* 66.4, pp. 303–315. DOI: 10.1093/analys/66.4.303.

Korbmacher, Johannes and Georg Schiemer (2018). "What Are Structural Properties??" In: *Philosophia Mathematica* 26.3, pp. 295–323. DOI: 10.1093/philmat/nkx011.

Ladyman, James (2005). "Mathematical Structuralism and the Identity of Indiscernibles". In: *Analysis* 65.3, pp. 218–221. ISSN: 00032638, 14678284. URL: http://www.jstor.org/stable/3329027 (visited on 05/07/2022).

— (2020). "Structural Realism". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. by Edward N. Zalta. Winter 2020. Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Ladyman, James, Øystein Linnebo, and Richard Pettigrew (2012). “Identity and Discernibility in Philosophy and Logic”. In: *Review of Symbolic Logic* 5.1, pp. 162–186. DOI: 10.1017/s1755020311000281.

Leibniz, G. W. (1714). *La Monadologie*.

Leitgeb, Hannes and James Ladyman (Sept. 2007). “Criteria of Identity and Structuralist Ontology”. In: *Philosophia Mathematica* 16. DOI: 10.1093/philmat/nkm039.

MacBride, Fraser (2005). “Structuralism Reconsidered”. In: *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Ed. by Stewart Shapiro. Oxford University Press, pp. 563–589.

Menzel, Christopher (2018). “Haecceities and Mathematical Structuralism”. In: *Philosophia Mathematica* 26.1, pp. 84–111. DOI: 10.1093/philmat/nkw030.

Moerdijk Ieke, van Oosten Jaap (2018). *Sets, Models and Proofs*. Ed. by Springer.

Parsons, Charles (2004). “Structuralism and Metaphysics”. In: *Philosophical Quarterly* 54.214, pp. 56–77. DOI: 10.1111/j.0031-8094.2004.00342.x.

Quine, W. V. (1976). “Grades of Discriminability”. In: *Journal of Philosophy* 73.5, pp. 113–116. DOI: 10.2307/2025739.

— (1960). *Word & Object*. MIT Press.

Reck, Erich and Georg Schiemer (2020). “Structuralism in the Philosophy of Mathematics”. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. by Edward N. Zalta. Spring 2020. Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Resnik, M.D. (1997). *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford scholarship online. Clarendon Press. ISBN: 9780198236085. URL: https://books.google.fr/books?id=EU2G%5C_BFt7YsC.

Saunders, Simon (2003). “Physics and Leibniz’s Principles”. In: *Symmetries in Physics: Philosophical Reflections*. Ed. by Katherine Brading and Elena Castellani. Cambridge University Press, pp. 289–307.

Schmidt, Heinz-Juergen (2019). “Structuralism in Physics”. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. by Edward N. Zalta. Winter 2019. Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Schwichtenberg, J. (2018). *Physics from Symmetry*. Ed. by Springer.

Shapiro, Stewart (Mar. 2008). “Identity, Indiscernibility, and ante rem Structuralism: The Tale of $i$ and $-i$”. In: *Philosophia Mathematica* 16.3, pp. 285–309. ISSN: 0031-8019. DOI: 10.1093/philmat/nkm042. eprint: https://academic.oup.com/philmat/article-pdf/16/3/285/4358076/nkm042.pdf. URL: https://doi.org/10.1093/philmat/nkm042.

— (1997). *Philosophy of mathematics: Structure and ontology.* N.Y: Oxford University Press.

# 5 Annexes: définitions supplémentaires

## Mathématiques : automorphismes

Soient $A$ et $B$ deux ensembles ou structures mathématiques et $f : A \rightarrow B$ une application. $A$ et $B$ sont munis d'au moins une opération interne appelées respectivement $*_A$ et $*_B$.

- $f$ est dite **bijective** si chaque antécédent a une unique image, c'est à dire si

$$\forall x \in A, !\exists y \in B \quad \text{tel que} \quad f(x) = y. \tag{3}$$

- $f$ **préserve la structure** si

$$\forall x_1, x_2 \in A \qquad f(x_1 *_A x_2) = f(x_1) *_B f(x_2), \tag{4}$$

- Une application qui est bijective et qui préserve la structure est appelé un **isomorphisme**.

- Un isomorphisme d'un ensemble $A$ sur lui même est appelé un **automorphisme**. L'opération identité $id : A \rightarrow A$ telle que $id(A) = A$ est toujours un automorphisme de $A$, il est appelé **automorphisme trivial**.

## Mathématiques : Relations

Une relation est une application prenant un ou plusieurs objets d'un ensemble pour former une proposition (pouvant être vrai ou fausse). Une relation **unaire** prends un seul objet et une relation **binaire** en prends deux. Si tous les objets pris par la relation appartiennent au même ensemble on parle de relation interne. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire interne sur l'ensemble $A$.

- $\mathcal{R}$ est **irréflexive** si $\forall x \in A, \neg(\mathcal{R}(x,x))$.

- $\mathcal{R}$ est **symétrique** si $\forall x, y \in A, \mathcal{R}(x,y) \Rightarrow \mathcal{R}(y,x)$

- $\mathcal{R}$ est **asymétrique** si $\forall x, y \in A, \mathcal{R}(x,y). \Rightarrow \neg(\mathcal{R}(y,x))$. Une relation asymétrique est forcement irréflexive (mais pas l'inverse). Les relations d'ordre strict $x > y$ et $x < y$ sont des relations asymétriques.

- $\mathcal{R}$ est une **relation métrique**, traditionnellement notée $g(.,.) = d$ si elle est symétrique, irréflexive, vérifiant la condition de séparabilité : $\forall x, y \in A$, $g(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ et l'identité triangulaire : $\forall x, y, z \in A, g(x,y) = d_1 \leq g(x,z) = d_2 + g(z,y) = d_3$. Elle permet de définir la notion de distance sur un espace topologique (et peut être facilement généralisée aux variétés (variétés Riemanienne)).

## Physique : Bosons et fermions

En physique moderne, les particules élémentaires sont comprises comme des excitations de champs quantifiés étant eux mêmes des représentations irréductible du groupes des symétries de l'espace-temps : le groupe de Poincaré (voir e.g. Schwichtenberg 2018). Ces représentations sont classifiés par un nombre demi-entier : le **spin**.

- Les particules de spin demi-entier sont appelés des **fermions** $\Psi$. Sous permutation de deux particules on a la transformation $\Psi \rightarrow -\Psi$, justifiant leur distinction à l'aide du PIIF. Les éléctrons, les quarks et les neutrinos sont des fermions.

- Les particules de spin entier sont appelés des **bosons** $\varphi$. Sous permutation de deux particules, le champs est invariant $\varphi \rightarrow \varphi$, les rendant formellement indiscernables. Les photons, les gluons, et médiateur des forces élémentaires sont des bosons.