Philosophie de la logique *
MADELHIS UE 902-EC2

Léo Vacher †

2022

Introduction

Dans ce court mémoire, nous discuterons les liens entre logique et mathématiques au regard des œuvres d'Henri Poincaré et de Luitzen Egbertus Jan Brouwer. Nous commencerons par discuter en Sec.1 la notion de neutralité en logique et en mathématiques, en nous appuyant sur les objections au logicisime relevés par les deux auteurs. Une telle entreprise verra l'entrée en scène de la notion d'intuition mathématique que nous prendrons le temps de discuter plus avant. Enfin, nous illustrerons les notions précédemment introduites sur un cas pratique en Sec. 2, à travers l'exemple de l'article "What the Tortoise said to Achilles" de Lewis Carroll.

1 Neutralité en logique et mathématiques

1.1 Logique et neutralité

La logique cherche à construire des systèmes formels à travers lesquels étudier les notions de raisonnement et d'inférence. En un sens, elle propose des abstractions du langage courant qu'elle cherche à formaliser. Commençons par définir l'ensemble des notions que nous utiliserons plus loin en nous basant sur Rebuschi 2021 et Klement 2021. Une théorie logique se construit en établissant une *syntaxe* permettant de construire des *formules*, blocs élémentaires de la théorie. L'ensemble des formules est appelé le *langage*. La syntaxe fournit également les symboles et opérateurs permettant de combiner les formules entre elles pour écrire de nouvelles formules. On établie alors des règles *sémantiques* permettant de définir les notions élémentaires telles que la *validité* d'une formule. La théorie logique sera alors formée par le sous-ensemble du langage composé des formules valides.

Le cas de la logique propositionnelle classique, qui sera notre objet d'étude ici, utilise pour formule des *propositions* (notées ici $p_1, p_2 \cdots p_j$). Il s'agit de variables auxquelles on peut associer une unique valeur de vérité parmi deux choix : vrai V ou faux F (principe de bivalence). La syntaxe du langage est construite en reliant ces propositions entre elles pour en former de nouvelles à l'aide de ponctuation ou de *connecteurs logiques* unaires ou binaires $(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow)$. Ces connecteurs sont définis formellement à partir de leurs actions sur les valeurs de vérité (e.g. à partir de tableaux de vérités, voir exemple en Tab. 1)[1]. Les *atomes propositionnels*, sont les propositions élémentaires ne pouvant pas être décomposés, permettant de construire tout le langage. La sémantique de la théorie est donnée par le principe de bivalence et établit qu'une formule est valide si elle ne présente aucune contradiction au niveau des valeurs de vérité. Plus

*L'auteur tiens à remercier son ami R. Botrel pour de nombreuses discussions ayant nourris le contenu du présent essai.

†Pour toute requête, merci de contacter vacher.leo.etu@gmail.com

[1]De par le principe de bivalence, on comprend qu'il est possible de construire seulement 4 opérateurs unaires $(\mathrm{id}, \neg, \top, \bot)$ et 16 opérateurs binaires.

p	$\neg p$
F	V
V	F

p_1	p_2	$p_1 \to p_2$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Table 1: Tables de vérité des operateurs $\neg$ et $\to$.

précisément, une proposition sera dite valide si elle forme une tautologie (vrai dans tous les cas) et invalide dans le cas contraire. On notera $\vDash p_j$ et $\nvDash p_j$ pour dire qu'une proposition p_j est respectivement valide ou invalide. La notion de validité d'un raisonnement concerne donc sa cohérence au niveau du transfert de vérité au sens ou aucune contradiction ne doit apparaître au niveau de la construction des formules. Il est alors possible de construire des *raisonnements logiques*, qui sont des combinaisons de propositions, et s'assurer de leur validité. Une illustration simple est donnée par le *principe du tiers exclus*, pouvant se déduire du principe de bivalence et de la définition de $\neg$ (Tab.1). Il s'écrit

$$\vDash (p_1 \vee \neg p_1), \tag{1}$$

et traduit qu'une proposition est ou vrai ou fausse (mais pas les deux). Cependant

$$\nvDash (p_1 \wedge \neg p_1), \tag{2}$$

car la proposition p_1 ne peut jamais être vrai et fausse (Il s'agit donc même d'une antilogie de sorte que $\vDash \neg(p_1 \wedge \neg p_1)$).

D'autres exemples de raisonnement simples sont donnés par les *inférences logiques* ou *syllogismes*, permettant d'inférer des propositions appelés *conclusions* à partir d'autres propositions appelés *prémisses* à l'aide de l'implication $\to$. L'exemple le plus simple est celui du *Modus Ponens* déductible directement à partir de la table de vérité de $\to$ en (Tab. 1), affirmant que la proposition suivante est valide :

$$\vDash (p_1) \wedge \vDash (p_1 \to p_2) \to \vDash p_2. \tag{3}$$

Proposition que l'on comprendra comme : "Si p_1 et [p_1 implique p_2] sont deux propositions valides (premisses), alors p_2 est aussi valide (conclusion)". Arrivés à la fin de cette introduction, il apparaît clairement que la logique ne se soucis pas du contenu des propositions elles mêmes. En effet, bien que les atomes propositionnels puissent être représentés par des phrases du langage courant telles que

p_1: "M. Arana est un bon professeur de Logique.",

p_2: "Mon chat est roux.".

nous n'avons jamais eu besoin d'y faire référence. Il est donc clair que des raisonnements tels que ceux donnés en Eq. (1) et Eq. (3) seront toujours valides que l'on parle des capacités pédagogiques de M. Arana ou de la pilosité de mon chat. En cela, la logique se prive également de toute ambition épistémologique, en ce qu'elle ne se questionne pas sur la vérité ou la fausseté, ni même la nature des atomes propositionnels eux-mêmes, et aucun logicien ne se risquera donc à quelques enquêtes félines sur ma propriété. On cherchera seulement à établir si des formules et raisonnements sont *valides* vis à vis de règles *sémantiques* établies, dépendant uniquement de leur structure i.e. des relations entre les propositions, jamais de leur contenu. On dira que la logique propositionnelle est *neutre*.

Cette conclusion peut être généralisée à la plupart des théories logiques classiques au-delà de la logique propositionnelle (logique du $n^{\text{ème}}$ ordre, logique modale ...), qui sont donc elles aussi neutres pour les mêmes raisons.

1.2 Mathématiques et neutralité chez Poincaré

De par les liens forts et évidents entre logique et mathématiques, il devient naturel de se demander quel rapport les deux disciplines entretiennent. Des penseurs comme Frege (Frege, G. 1884) ou Russel (Russel, B. 1903) ont défendu la position affirmant que la logique contient en puissance toutes les mathématiques. On parle alors de *logicisme* (ou néo-logicisme dans sa forme moderne (pour une revue complète voir e.g. Tennant 2017)).

Poincaré lui, s'oppose à l'idée que l'édifice mathématique puisse être conçu uniquement à partir d'une successions de syllogismes tels que ceux introduits plus haut. Il argumente notamment que, si tel était le cas, toute la discipline ne se réduirait qu'à une gigantesque tautologie déguisée (Poincaré 1903) (rappelons-nous en effet que, comme discuté en Sec.1.1, une proposition est dite "valide" si il s'agit d'une tautologie). Les théorèmes ne seraient alors que des réécritures des axiomes, n'apportant aucune information supplémentaire. On ne saurait donc expliquer l'accroissement apparent de la connaissance mathématique et le fait que de nouveaux théorèmes soient régulièrement démontrés et considérés comme enrichissants. Cela semble également en désaccord avec l'applicabilité si prolifique des mathématiques, notamment en sciences de la nature et la rétroaction permanente qu'il semble y avoir entre les deux disciplines. De plus, comme souligné par Poincaré 1902, penser les mathématiques comme une science déductive semble en violente contradiction avec la démarche quotidienne effectivement suivie par le chercheur, qui procède par tâtonnements en utilisant une démarche inductive. L'apparente cohérence de l'édifice mathématique comme une science logique dont les théorèmes sont déduits des axiomes n'est en fait que le produit fini de la recherche, qui n'est figée qu'en apparence (pour une discussion plus approfondie sur ce point et la notion "d'empirisme en mathématiques" voir également Lakatos 1974).

Il semble donc impossible de créer de la connaissance nouvelle à partir d'un processus purement logique et neutre par essence. Pour Poincaré, "Il y a une réalité plus subtile, qui fait la vie des êtres mathématiques, et qui est autre chose que la logique" (Poincaré 1908). Ce quelque chose, c'est la capacité du mathématicien à avoir une compréhension générale, et profonde des objets qu'il manipule : l'intuition. En cela, il est comparable à un joueur d'échecs connaissant les règles, mais ne se contentant pas de les appliquer de manière aléatoire, il cherche à réaliser une construction devant posséder une forme d'unité (Poincaré 1911). Une seconde métaphore similaire et éclairante est donnée par la distinction entre un architecte ayant une vue d'ensemble (mathématicien) et du maçon qui est en charge de la construction (logicien). "Cette vue d'ensemble, la logique pure ne peut nous la donner, c'est à l'intuition qu'il faut la demander"(Poincaré 1908).

Poincaré hérite en fait cette notion directement de la pensée Kantienne (Detlefsen 2011). Là où Descartes avant lui distinguait intuition et déduction (Descartes, R. 1701), Kant distingue respectivement les jugements dits *synthétiques* et *analytiques*[2](Kant 1781,Kant, E. 1783). Les jugements analytiques sont ceux du raisonnement, avec lesquels il est impossible de créer de la connaissance car ils relèvent simplement de la déduction, qui déroule des informations déjà présentes, par exemple dans une définition. Comme illustration, l'assertion "mon frigidaire est froid", est un jugement analytique, car il ne nous apprend aucune information, ou pour paraphraser Kant, E. 1783 : "je n'ai absolument rien ajouté à ma notion de [frigidaire], mais je l'ai analysée". A contrario, les jugements synthétiques, eux, basés sur l'intuition, peuvent étendre la connaissance en ajoutant des informations non contenues dans leur définition. Pour Poincaré comme pour Kant donc, la logique relève des jugements analytiques alors que "Les jugements mathématiques sont tous synthétiques" (Kant, E. 1783). Pour cela Kant, prend l'exemple éclairant de l'addition en affirmant que la proposition "$7 + 5 = 12$" est un jugement synthétique, car ni "5" ni "7" ne sont contenus dans la définition de "12". C'est dans cette continuité qu'il faut comprendre la notion d'intuition chez Poincaré[3].

[2]Il s'agit même plus précisément de jugements synthétiques et analytiques *à priori*, c'est à dire indépendants de l'expérience sensible.

[3]Pour autant, on ne peut pas identifier les positions de Kant et de Poincaré, à ce sujet voir également Ben-Menahem 2001.

Une conséquence immédiate apparaît alors : pour faire appel à son intuition et établir des théories cohérentes et nouvelles, le mathématicien doit inévitablement avoir une vision du contenu des objets sur lesquels il raisonne[4]. En effet, comment avoir l'intuition d'objets abstraits et vides ? Le raisonnement mathématique n'est alors pas neutre. En cela, il utilise la logique mais la logique seule n'est pas suffisante. Il ne s'agit plus de catégoriser les raisonnements valides comme en Sec. 1.1, mais d'utiliser ces raisonnements valides pour connecter entre eux des concepts.

L'intuition est pour Poincaré également profondément liée à la relation de l'esprit humain avec la notion d'infini[5] et plus précisément la capacité de l'esprit humain à généraliser un raisonnement sans avoir pour autant à l'effectuer, car il nécessiterait en pratique une infinité d'étapes. En effet, l'auteur discute abondamment l'exemple du raisonnement par récurrence, qu'il considère comme "le raisonnement mathématique par excellence" (Poincaré 1902). Il démontre d'ailleurs comment ce dernier peut être utilisé pour définir de nombreuses notions élémentaires telles que l'addition et la multiplication. Il consiste à considérer une propriété au rang n, et montrer qu'elle est aussi vrai au rang $n + 1$. Si tel est le cas, on pourra alors généraliser et considérer qu'elle sera vrai pour tout n. C'est cette extrapolation qui relève pour lui du synthétique et non du formel : l'intuition permet une généralisation à l'infini. En un sens, ce type de raisonnement permet de passer du particulier au général en faisant ce saut conceptuel : si une propriété est vraie localement, on peut inférer qu'elle le sera tout le temps de proche en proche, sans avoir à écrire une infinité de syllogismes : "[L'esprit] se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe [...]" (Poincaré 1902). C'est précisément ce saut dans l'infini que la logique ne peut pas faire[6], permettant de développer une forme d'induction propre aux mathématiques[7].

Un bon exemple peut être trouvé dans la géométrie. Dans les Éléments d'Euclide (Euclide d'Alexandrie 2018), l'auteur construit à partir de 5 axiomes un ensemble de théorèmes aux fondements de la géométrie plane. Il est clair que c'est la logique qui sert de ciment pour passer des axiomes aux théorèmes, mais il est aussi clair qu'il ne s'agit pas que d'une succession de syllogismes aveugles sur la nature géométrique des objets en question (points, droites ...). La définition des figures géométriques et l'établissement de leurs propriétés sont ainsi fortement ancrés dans l'intuition. On pourra également se risquer ici à discuter le fait que la capacité de l'esprit à s'accommoder par récurrence de raisonnements contenant une infinité d'étapes joue un rôle central en géométrie, implicitement ou explicitement. Au-delà du raisonnement par récurrence, penser la notion même de continuité et d'illimité (e.g. d'une ligne droite) le requiert (en demandant à l'esprit de prolonger indéfiniment, respectivement vers l'infiniment petit et grand). C'est donc par exemple l'intuition qu'il faudra invoquer, lorsque confronté à la définition des droites parallèles, il nous sera demandé de les prolonger indéfiniment pour s'assurer que jamais elles ne se croisent[8].

[4]Cette position peut paraître ironique, car Poincaré a pu activement participer à l'extrême abstraction d'objets géométriques très intuitifs tels que les polyèdres. A ce sujet, voir e.g. Pont 1974.

[5]Sur l'infini lui-même en tant qu'objet mathématique, Poincaré s'opposera à Cantor, en refusant la possibilité de le traiter comme une quantité achevée (infini actuel) (voir Gerhard Heinzmann and Stump 2022 et Poincaré 1913).

[6]Nous restons ici dans le cadre de la logique classique. Notons tout de même que la logique a connu de très nombreux développements récents dans lesquels la notion d'infini est centrale (voir e.g. Bell 2016), brouillant les pistes de notre discussion et les possibles délimitations entre logique et mathématiques.

[7]En un sens, un rapprochement peut être fait avec l'induction en sciences de la nature qui tire des lois générale d'une accumulation de cas particuliers sans pourtant pouvoir en considérer une infinité. A ce sujet et le lien avec la notion d'esprit chez Poincaré voir e.g. Crocco 2016.

[8]Un esprit rebelle et éclairé pourra plutôt choisir de refuser cette définition et de fonder la géométrie non-Euclidienne !

1.3 Mathématiques et neutralité chez Brouwer

Pour Brouwer, les mathématiques sont avant tout une activité mentale, dont le langage ne peut rendre compte que de manière incomplète (L. E. J. Brouwer 1952). On parle alors d'une discipline *extra-linguistique*. En cela, on peut certainement rapprocher les mathématiques de certaines formes d'arts. La logique, au contraire, se fonde dans les régularités du langage en cherchant à le formaliser. Brouwer s'oppose donc également à l'entreprise logiciste, mais en allant jusqu'à proposer un rejet de la logique classique, qui n'est tout simplement pas un outil adéquat pour l'entreprise mathématiques : "The mistake of logistics lies in the fact that it creates nothing else other than a linguistic structure, which can never be transformed into mathematics proper" (L. Brouwer 1907).

Comme Poincaré, Brouwer évoque l'intuition comme à la source du processus créatif que l'on peut comprendre comme la capacité de l'esprit humain à effectuer l'expérience mentale (Brouwer parle de "constructions") des objets mathématiques considérés. Selon lui, cette faculté tire son origine dans la cognition du temps et de son évolution[9].

Le langage, identifié à la logique, n'est donc absolument pas nécessaire à l'expérience mathématique. Plus fortement que ça, il faut même rejeter ce langage (la logique classique) car elle est inadaptée à retranscrire l'intuition, notamment de par sa neutralité. L'expérience mathématique consistant alors en une activité de l'esprit visant à effectuer la construction de différents objets, comment pourrait-on alors en rendre compte en utilisant un formalisme neutre ?

Brouwer propose la mise en place d'une nouvelle forme de logique non-classique, dite *intuitionniste*, plus adaptée au fondement des mathématiques. La sémantique de la logique intuitionniste n'est pas centrée sur le transfert de vérité, mais sur la possibilité ou non d'effectuer des constructions à partir de certains objets (pour une présentation complète voir Heyting 1956). En un sens, il s'agit là de faire l'expérience directe des objets en question. $\vDash p$ devra donc se comprendre comme l'affirmation "il est possible de construire p" au lieu de "p est une tautologie" en logique propositionnelle classique. Cette nouvelle logique n'est donc pas neutre par essence, car la possibilité ou non d'effectuer certaines constructions dépend des objets considérés.

Les connecteurs logiques sont repensés comme des éléments de construction et ne sont donc plus définis par des tables de vérité comme en Tab. 1. Ainsi $\neg p_1$ doit se comprendre comme "il est possible d'effectuer une construction p_2 supposant l'existence d'une construction de p_1 tel que p_2 mène à une contradiction". $\vDash (p_1 \rightarrow p_2)$, lui, doit se comprendre comme "une construction de p_2 est possible à partir d'une construction de p_1 et d'une seconde construction intermédiaire p_3". Cette dernière définition permet d'éviter le fait que faux puisse impliquer vrai dans la définition de $\rightarrow$ en Tab.1, souvent considéré comme un exemple canonique de contenu contre intuitif en logique. On voit bien également ici que de telles définitions sont dépendantes du contenu des p_i.

Un des plus grands intérêts d'une telle refonte de la sémantique de la logique classique est qu'elle n'a pas que des conséquences conceptuelles, mais aussi pratiques. Certains théorèmes et raisonnements ne sont plus valides avec les connecteurs ainsi redéfinis. C'est le cas de la règle d'élimination

$$\neg\neg p \rightarrow p, \tag{4}$$

qui n'est plus valide en logique intuitionniste. On peut comprendre ce résultat de la manière intuitive suivante : le fait qu'une construction assumant $\neg p$ conduise à une contradiction n'implique pas qu'il soit pour autant possible de construire p.

La non-validité de cette règle implique également la non-validité du principe de tiers exclus en logique intuitionniste (Eq.1). Ainsi, il sera impossible d'assigner une valeur de vérité à certaines propositions (pour plus de détails voir également Moschovakis 2021).

On parle de *mathématiques constructivistes* pour designer les mathématiques fondées sur la logique intuitionniste exigeant des preuves par constructions (pour une discussion détaillée voir Bridges, Palmgren, and Ishihara 2022).

[9]Pour Brouwer, le temps est la seule forme d'intuition a priori possédée par le sujet au sens de Kant.

Pour reprendre l'exemple des éléments de géométrie d'Euclide pris plus haut, là encore les mathématiques ne sont pas neutres, car ce sont des objets géométriques qui sont manipulés. Le mathématicien effectue alors une série de constructions mentales avec ces objets (dans ce cadre, on peut même imaginer faire des constructions "physiques" en dessinant les objets sur une feuille) permettant de construire les preuves de chaque théorème. De par sa nature apparemment intrinsèquement propice à l'intuition et à la construction, c'est sans surprise que l'élève de Brouwer, Heyting proposa très tôt une relecture intuitionniste de la géométrie projective lors de sa dissertation de thèse (Heyting 1925). Cette relecture fut la première instance d'axiomes dans la littérature intuitionniste, choix philosophiquement débattu d'un point de vue intuitionniste, car ils ne peuvent par définition pas être construits, donc comment en avoir une intuition ? Cependant, cette axiomatisation apparaît comme absolument nécessaire pour la mise en place de la géométrie [10]. L'axiomatisation intuitionniste de la géométrie Euclidienne suivra plus tard (Heyting 1959), se montrant relativement difficile (Dalen 1990). D'autres axiomatisations modernes seront proposées et l'aventure de la géométrie constructiviste n'est certainement pas terminée. Quoi qu'il arrive une conclusion se dessine clairement : comme dans le cas de la logique, certain théorèmes classiques apparaissent comme non-prouvable dans ce nouveau cadre constructiviste (Naibo 2015, Lombard and Vesley 1998). Il en va de même pour les généralisations constructivistes (axiomatiques ou non) des autres domaines des mathématiques. Choisir cette approche, permettant une meilleure interprétation des objets manipulés demande donc cependant de renoncer à certains résultats classiques. Cependant, il ne faut pas tomber dans l'écueil encore répandu[11] considérant que cette approche est mathématiquement stérile et ne pourrait avoir un intérêt que pour les philosophes. Ce regard nouveau aide à repenser de nombreux problèmes classiques et de nombreuses branches des mathématiques ont été réécrites, et même développées entièrement en utilisant une approche purement constructive. Cette approche est également particulièrement concluante et prometteuse pour l'informatique théorique.

On notera que Brouwer semble également partager une vision comparable à celle de Poincaré sur le rôle de l'intuition dans la faculté de l'esprit à itérer indéfiniment par récurrence pour l'induction mathématique (voir Dalen 2012)[12].

1.4 Brève comparaison de la position des deux auteurs

On constate donc que, pour les deux auteurs, les mathématiques ne peuvent être pensés comme une simple extension de la logique classique, et ce en partie car, contrairement à cette dernière, les mathématiques ne sont pas neutres vis à vis des variables qu'ils manipulent. Pour Poincaré comme pour Brouwer, c'est cette non neutralité qui permet au mathématicien d'avoir une intuition des objets qu'il manipule et ainsi créer des nouvelles connaissances en allant au-delà de l'édifice tautologique proposé par les syllogismes.

Les positions des deux auteurs peuvent donc être considérées comme proches en ce qu'elles peuvent toute deux être catégorisés comme *intuitionnistes*. Plus précisément, les deux auteurs s'accordent sur les points suivants :

1. Les mathématiques n'ont pas qu'une signification formelle, mais dépendent du contenu des objets manipulés : elles ne sont pas neutres.

2. Les objets mathématiques peuvent être immédiatement saisis par l'esprit pensant (l'intuition). Le savoir mathématiques est ainsi indépendant de l'expérience.

[10]Le groupe Bourbaki (parmi d'autres) défendra notamment le fait qu'axiomes et intuition ne sont pas incompatibles, voir e.g. Dieudonné 1939; Bourbaki 1950.

[11]Idée popularisée par D. Hilbert, opposé à l'approche constructiviste, bien résumée dans sa citation devenue célèbre : "Taking the principle of excluded middle [principe du tiers exclus] from the mathematician would be the same, say, as proscribing the telescope to the astronomer or to the boxer the use of his fists."(Hilbert 1928).

[12]les deux auteurs divergent cependant concernant la notion d'infini actuel et la possible hiérarchisation des infinis.

proposés comme définitionnels de l'intuitionnisme par Heyting 1934.

Cependant, comme nous l'avons vu, leurs positions ne peuvent pas être confondues. Il existe des divergences profondes, notamment dans la manière de concevoir la notion même d'intuition, mais surtout dans leur rapport à la logique. Essayons d'approfondir plus clairement ces différences en nous appuyant sur la littérature.

Comme proposé par Mclarty 1997, il convient de distinguer trois types d'intuitionnisme dits "banal", "expansif" et "restrictif" : l'intuitionnisme banal affirme simplement que les mathématiques exigent quelque chose de plus que la rigueur formelle. L'expansif déclare que le contenu des mathématiques va au-delà toute formalisation. Le restrictif rejette certaine parties des mathématiques standards, car inaccessible à l'intuition ou à une procédure constructiviste.[13].

Suivant Mclarty 1997 et G. Heinzmann and Nabonnand 2008, il est clair que Poincaré est au moins restrictif, car il indique très clairement que les mathématiques ne peuvent se résumer à la logique formelle, puisque ils nécessitent l'intuition. Même si cela est moins direct, il peut en fait même être qualifié d'expansif, car il considère également que la formalisation ne peut pas rendre compte complètement des mathématiques, et en particulier de l'intuition. On ne peut cependant pas le qualifier de restrictif, car il n'émet aucune objection contre les mathématiques classiques et considère la présence de la logique comme garante de la rigueur de la discipline.

Brouwer lui est ouvertement expansif (de par sa perspective extra-linguistique de l'activité mathématique) mais également indubitablement restrictif. Comme nous l'avons vu, il rejette en effet la logique classique, et avec elle certaines branches des mathématiques qui ne peuvent pas être dérivées avec une approche constructiviste. En étant restrictif, Brouwer est donc en un sens beaucoup moins conservateur que Poincaré.

On peut donc affirmer que les positions des deux auteurs différent dans leur rapport au langage, et donc, à la logique. Alors que comme nous l'avons vu, pour Brouwer le langage, identifié à la logique, ne peut pas rendre compte de l'activité mathématique, pour Poincaré au contraire, le contenu mathématique au-delà des structures linguistiques n'est pas un domaine accessible pour la connaissance humaine. En cela, pour Poincaré le langage mathématique et la logique restent des outils nécessaires à la création mathématique. Le désaccord avec Brouwer devient saillant lorsque celui-ci lui reprochera de faire preuve de "confusion between the act of constructing mathematics and the language of mathematics." (L. Brouwer 1907) [14]. Reprochant donc certainement à l'auteur français de ne pas être allé assez loin dans son rejet du langage.[15] En effet, Poincaré ne refuse donc pas la logique classique mais met en évidence sa limitation dans les mathématiques là où Brouwer la rejette complètement pour en proposer une alternative, impliquant une remise en question de certaines parties des mathématiques. En bref : pour Poincaré logique et intuition travaillent de concert, pour Brouwer l'utilisation logique classique n'est simplement pas désirable.

Notons que nous n'avons pas une lecture métaphysique réaliste ou anti-réaliste des objets mathématiques. Nous ne discuterons pas ce point ici car il nous ferait trop diverger et nous renvoyons le lecteur à G. Heinzmann and Nabonnand 2008.

2 Une illustration: Achilles et la Tortue par Carroll.

2.1 Le paradoxe de Zénon revisité

"What the Tortoise Said to Achilles", est un court article publié en 1895 dans le journal Mind par Lewis Caroll (Carroll 1895). L'auteur de "Alice au pays des merveilles" cherche à discuter

[13] paraphrasé et traduit de G. Heinzmann and Nabonnand 2008

[14] Il est intéressant de noter que, même si les deux auteurs étaient contemporains, Poincaré n'était certainement pas conscient de l'œuvre de Brouwer sur les fondements des mathématiques. Les deux auteurs ont déjà échangé avec un respect mutuel, concernant des sujets de topologie ou d'analyse. Brouwer lui connaît Poincaré et admire ouvertement Poincaré (Dalen 2012), et l'œuvre du mathématicien français nourrit clairement sa réflexion.

[15] Notons que pour Brouwer langage mathématique et logique classique sont considérés comme identiques. On ne peut pas tirer la même conclusion chez Poincaré.

les fondations de la logique à travers un dialogue entre les deux protagonistes du paradoxe de Zénon. Malgré le fameux paradoxe donc, Achille parvient tout de même à rejoindre la tortue, mais celle-ci l'expose immédiatement à un nouveau problème. Il n'est plus ici question de l'impossibilité de rejoindre un point B à partir d'un point A mais d'atteindre une conclusion Z à partir de deux prémisses A et B. En référence à la première démonstration des éléments d'Euclide[16], la tortue propose à Achille le raisonnement suivant sur un triangle équilatérale : soient les propositions

- A : les deux côtés de ce triangle sont des choses égales à une même chose.
- B : des choses égales à une même chose sont égales entre elles.
- Z : Les deux côtés de ce triangle sont égaux entre eux

peut on alors considérer $A \wedge B \to Z$ comme étant un raisonnement valide ? En renommant les longueurs des côtés du triangle respectivement $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ et $\overline{CB}$, puis suivant la définition donnée en Sec.1.1, on peut réécrire ce raisonnement comme un Modus Ponens donné par Eq.(3), avec $p_1 \leftrightarrow (\overline{AC} = \overline{AB}) \wedge (\overline{BC} = \overline{AB})$ et $p_2 \leftrightarrow \overline{AC} = \overline{CB}$. Ainsi $A \leftrightarrow \vDash p_1$, $B \leftrightarrow \vDash (p_1 \to p_2)$ et $Z \leftrightarrow \vDash p_2$. Il s'agit donc en tout point d'un raisonnement valide respectivement aux yeux de la syntaxe et à la sémantique de la logique propositionnelle comme discuté en Sec.1.1. Cependant, la Tortue refuse la validité d'un tel raisonnement. Selon elle, il faudrait également ajouter la validité de la proposition du Modus Ponens lui-même (Eq. (3)) aux prémisses, ici réécrite

$$C \leftrightarrow \vDash (A \wedge B \to Z). \tag{5}$$

En effet, il faut bien accepter qu'un raisonnement comme le Modus Ponens est valide avant de pouvoir l'utiliser ! On arrive donc à

$$(A \wedge B \wedge C) \to Z. \tag{6}$$

Cependant, ici encore on ne peut pas accepter sa validité. Il faudrait aussi ajouter la validité de ce raisonnement aux prémisses avant de l'utiliser ! Introduisant alors

$$D \leftrightarrow \vDash (A \wedge B \wedge C \to Z), \tag{7}$$

pour pouvoir réécrire

$$(A \wedge B \wedge C \wedge D) \to Z. \tag{8}$$

Bien sur, la Tortue ne s'arrêtera pas là, et il faudra accepter également $E \leftrightarrow \vDash (A \wedge B \wedge C \wedge D \to Z)$ et ainsi de suite. Il s'agit là d'une régression à l'infini : en hommage au paradoxe de Zénon, il faudrait donc accepter une infinité de prémisses pour écrire une implication valide de Z. Est-il donc impossible de conclure quoi que ce soit sans faire intervenir une infinité de prémisses ?

2.2 Des élements de réponses sous le prisme du logicien

Pour chercher des solutions à ce paradoxe, il est nécessaire de se demander dans quel cadre interpréter ce problème. Au vu de la logique propositionelle classique formelle telle que définie en Sec. 1.1, on pourra argumenter que le paradoxe de la tortue n'a tout simplement pas lieu d'être. En effet le raisonnement du modus ponens est un théorème et non une prémisse qui doit être acceptée pour établir un raisonnement (voir aussi Thomson 2010). En d'autres termes, Eq.3 est forcement valide dans le cadre de la logique propositionnelle d'après les propriétés définitionnelles de l'opération d'implication données en Tab.1. Il n'est alors pas une prémisse. On pourrait reprocher à la tortue de faire une confusion entre le langage (définis en Sec.1.1 comme l'ensemble des formules) et méta-langage (i.e. les 'règles') de la logique. Cependant, comme nous allons le discuter dans les sections suivantes, il peut être insatisfaisant de balayer ainsi ce paradoxe d'un revers de la main, car on perd de vue la nature des objets discutés (ici des triangles), mettant en évidence la neutralité de la logique s'opposant à la neutralité des mathématiques tels que discutés par Poincaré et Brouwer. En effet, la tortue parle d'objets mathématiques ici et non de propositions abstraites.

[16] B est d'ailleurs le premier axiome de la géométrie Euclidienne.

2.3 Des élements de réponses sous le prisme de Poincaré

Si on considère le raisonnement proposé par la tortue comme un problème mathématique et non plus logique, on quitte de toute évidence la neutralité comme déjà mentionné par Poincaré, car on en vient à considérer des triangles. En plus des outils de la logique classique, nous pouvons alors faire appel à notre intuition.

La régression à l'infini proposée par la tortue fait alors fortement écho au raisonnement par récurrence, cher à Poincaré, qui nous offre ici une bonne occasion d'effectuer une induction mathématique purement synthétique. Sachant que A, B et C sont vrais, on pourra donc construire un raisonnement nous permettant d'accepter par itération une infinité d'autres propositions D, E, F... pour enfin conclure Z. On pourra rétorquer, que finalement, des raisonnements contenant une infinité de propositions sont couramment acceptés lors des inductions mathématiques, sans que personne ne vienne crier au paradoxe. La raison étant qu'ils se révèlent extrêmement puissants et indéniablement consistants.

2.4 Des élements de réponses sous le prisme de Brouwer

Malgré une redéfinition des connecteurs, le modus ponens (Eq.3) est toujours valide dans le cadre de la logique intuitionniste (Moschovakis 2021). Pour cette raison, on pourrait tenir un discours similaire à celui donné en Sec.2.2 pour répondre à Mme Tortue sous le prisme de cette nouvelle logique.

Cependant, il serait certainement préférable d'opter pour une réponse visant à rejeter l'utilisation du langage qu'elle sait si bien manipuler, pour préférer ici des constructions. En effet, comme dans le cas du paradoxe de Zénon, la tortue exploite les failles du langage et ses limites jusqu'à obtenir une contradiction à l'évidence même de l'expérience directe que tout un chacun peut faire du monde.

On pourra alors dire que la régression à l'infini proposée par la tortue se brise à la première étape, car connaissant les triangles et ayant une expérience mentale claire de ce qu'ils sont, nous pouvons immédiatement effectuer une construction de Z à partir de constructions de A et de B. Il faudra donc la convaincre de cesser de faire preuve de mauvaise foi de la sorte et de plutôt construire un triangle mental (ou on pourra même la nourrir son intuition en construisant un triangle sur une feuille et en s'aidant d'une règle pour en mesurer les cotés), pour établir une preuve extra-linguistique de Z à partir des constructions A et B comme l'aurait suggéré Brouwer.

En poussant encore plus loin, on pourrait proposer à madame tortue une construction complète de Z à partir d'une construction de A et de B dérivée convenablement depuis les axiomes intuitionnistes de la géométrie plane proposés par Heyting 1959. Cela ne fait aucun doute qu'elle, autant que quiconque, se laissera alors convaincre. Cependant, il est à craindre que l'auteur du présent essai ne possède pas les compétences requises pour une telle entreprise et nous ne nous y risquerons donc pas ici !

Conclusion

Nous avons donc vu que, pour Poincaré comme pour Brouwer, le raisonnement mathématique ne peut pas être neutre comme le sont les syllogismes, et ainsi il doit y avoir plus à l'édifice mathématique que la logique formelle. Pour les deux auteurs, il s'agit de l'intuition que le mathématicien a des objets qu'il manipule. Alors que pour Poincaré, la logique reste nécessaire et complémentaire à l'intuition, pour Brouwer il faut la rejeter et préférer une approche constructiviste. Nous avons vu que, quelque soit le cadre intellectuel choisi, il est alors possible de proposer une solution au paradoxe soumis par la Tortue à Achille dans l'œuvre de Caroll.

References

Bell, J. L. (2016). "Infinitary Logic". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. by Edward N. Zalta. Winter 2016. Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Ben-Menahem, Y. (2001). "Convention: Poincaré and Some of His Critics". In: *The British Journal for the Philosophy of Science* 52.3, pp. 471–513. DOI: 10.1093/bjps/52.3.471. eprint: https://doi.org/10.1093/bjps/52.3.471. URL: https://doi.org/10.1093/bjps/52.3.471.

Bourbaki, N. (1950). "The Architecture of Mathematics". In: *The American Mathematical Monthly* 57.4, pp. 221–232. ISSN: 00029890, 19300972. URL: http://www.jstor.org/stable/2305937 (visited on 01/19/2023).

Bridges, D., E. Palmgren, and H. Ishihara (2022). "Constructive Mathematics". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. by Edward N. Zalta and Uri Nodelman. Fall 2022. Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Brouwer, L. E. J. (1952). *Historical background, principles, and methods of intuitionism.*

— (1907). *Over de grondslagen der wiskunde.*

Carroll, L. (1895). *What the Tortoise Said to Achillese.* URL: https://wmpeople.wm.edu/asset/index/cvance/Carroll.

Crocco, G. (2016). "Poincaré Et le Problème de L'Esprit". In: *Revue de Métaphysique et de Morale* 90.2, p. 209. DOI: 10.3917/rmm.162.0209.

Dalen, D. van (1990). "Heyting and Intuitionistic Geometry". In: *Mathematical Logic*. Ed. by Petio Petrov Petkov. Boston, MA: Springer US, pp. 19–27. ISBN: 978-1-4613-0609-2. DOI: 10.1007/978-1-4613-0609-2_2. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0609-2_2.

— (2012). "Poincaré and Brouwer on intuition and logic". In.

Descartes, R. (1701). *Règles pour la direction de l'esprit.*

Detlefsen, M. (2011). "Poincaré Versus Russell Sur le Rôle de la Logique Dans les Mathématiques". In: *Les Etudes Philosophiques* 97.2, p. 153. DOI: 10.3917/leph.112.0153.

Dieudonné, J. (1939). *Les Methodes Axiomatiques Modernes et les Fondements des Mathematiques.*

Euclide d'Alexandrie (2018). *Les Éléments de Géometrie d'Euclide*. Wentworth Press.

Frege, G. (1884). *Grundlagen der Arithmetik.*

Heinzmann, G. and P. Nabonnand (2008). *Poincaré: intuitionism, intuition, and convention.* Ed. by Publications des Archives Henri-Poincaré. URL: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01083141/document.

Heinzmann, Gerhard and David Stump (2022). "Henri Poincaré". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. by Edward N. Zalta. Summer 2022. Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Heyting, A. (1925). *Intuitionistic axiomatics of projective geometry.*

— (1934). *Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie.*

— (1956). *Intuitionism: an introduction.*

— (1959). "Axioms for Intuitionistic Plane Affine Geometry". In: *The Axiomatic Method*. Ed. by Leon Henkin, Patrick Suppes, and Alfred Tarski. Vol. 27. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier, pp. 160–173. DOI: https://doi.org/10.1016/S0049-237X(09)70026-6. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0049237X09700266.

Hilbert, D. (1928). *Die Grundlagen der Mathematik.*

Kant, E. (1781). *Critique de la Raison pure.*

Kant, E. (1783). *Prolégomènes à toute métaphysique future.*

Klement, K. C. (2021). *Propositional Logic - IEP.*

Lakatos, I. (1974). *Preuves et réfutations : Essai sur la logique de la découverte mathématique.* Ed. by Editions Hermann.

Lombard, M. and R. Vesley (1998). “A common axiom set for classical and intuitionistic plane geometry”. In: *Annals of Pure and Applied Logic* 95.1, pp. 229–255. ISSN: 0168-0072. DOI: https://doi.org/10.1016/S0168-0072(98)00017-7. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168007298000177.

Mclarty, C. (June 1997). “Poincare: Mathematics & Logic & Intuition”. In: *Philosophia Mathematica* 5. DOI: 10.1093/philmat/5.2.97.

Moschovakis, J. (2021). “Intuitionistic Logic”. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. by E. N. Zalta. Fall 2021. Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Naibo, A. (2015). “Constructibility and Geometry”. In.

Poincaré, H. (1902). *La Science et l’Hypothèse*.

— (1903). *Sur la nature du raisonnement mathématique*.

— (1908). *Les définitions mathématiques et l’enseignement*.

— (1911). *L’intuition et la logique en mathématiques*.

— (1913). *Dernières pensées*.

Pont, J. C. (1974). *La topologie algébrique : des origines à Poincaré*. Ed. by Presses universitaires de France (Paris). URL: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3362872t#.

Rebuschi, M. (2021). *Introduction à la logique modale - cours M2-LEHS*.

Russel, B. (1903). *Principles of Mathematics*.

Tennant, N. (2017). “Logicism and Neologicism”. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. by E. N. Zalta. Winter 2017. Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Thomson, J. F. (2010). “What Achilles Should Have Said to the Tortoise”. In: *Thinking about Logic: Classic Essays*. Ed. by S. Cahn. Taylor & Francis.