

Aux origines du calcul différentiel :

Les courbes minimisantes de la fin du XVII^{ème} au début du XVIII^{ème} siècle, de la brachistochrone aux géodésiques.

UE 902 EC 4*

Léo Vacher

2023

1 Introduction

Une *courbe géodésique* est une courbe minimisant la distance entre deux points sur une surface¹. On comprend immédiatement que cette définition est à elle seule une boîte de Pandore mathématique : elle fait appel à la notion de distance, de minimisation et de surface. La notion de géodésique se situe ainsi à l'interface des deux grands domaines du calcul différentiel et intégral et de la géométrie dans l'espace. Elle jouera ultimement un rôle central dans le développement moderne de la géométrie différentielle dans laquelle elle occupera une place centrale et naturelle.

Il s'agit également d'une notion omniprésente au cœur des sciences de la nature, de manière évidente en mécanique, mais aussi dans l'ensemble des sciences physiques au prix d'abstractions supplémentaires. Elles occupent en particulier une place de première importance en relativité générale, dans laquelle le mouvement des corps soumis à la force de gravitation est compris comme un mouvement géodésique dans un espace-temps courbe. Plus généralement encore, toutes les lois de la physique connues peuvent être exprimées par des principes dits "de moindre action", selon lesquels l'évolution des systèmes est donnée par des courbes minimisantes ou maximisantes². En effet, comme nous le verrons, s'intéresser aux courbes géodésiques, c'est plus généralement s'intéresser à la question des courbes satisfaisant à des propriétés particulières de minima (ou de maxima).

Nous discuterons ici comment la notion de géodésique a émergé comme une notion centrale au cœur des mathématiques modernes à la fin du XVII^{ème} et au début du XVIII^{ème} siècle avec la naissance au calcul différentiel et intégral. Nous commencerons notre exposé en discutant le cas d'école de l'étude de la courbe dite brachistochrone, marquant le point de départ de l'utilisation des outils modernes du calcul différentiel aux problèmes de minimisation. Les enjeux historiques de la brachistochrone seront présentés en Sec. 2, suivi d'une présentation de la cycloïde comme solution du problème en Sec. 3, en commençant par une présentation de la courbe suivie par la présentation de deux des solutions historiques obtenues par les frères Jean et Jacques Bernoulli. En Sec. 4, nous verrons comment ce problème a exacerbé la rivalité entre les deux frères tout en plaçant l'étude des courbes minimisantes au premier plan de la scène mathématique du début du XVIII^{ème} siècle. En Sec. 5 nous discuterons comment le problème des géodésique est apparu dans le sillage de celui de la brachistochrone et nous détaillerons l'établissement de leur équation différentielle par Euler. Enfin,

*Pour toute requête, contacter vacher.leo.etu@gmail.com

1. ou plus généralement une courbe extrémalisant la distance sur une variété (pseudo)-Riemannienne.

2. Un cran plus loin dans l'abstraction, on peut comprendre ces trajectoires, données par les équations de Hamilton, comme étant des forme de géodésiques dans l'espace des phases vu comme une variété symplectique, pour une discussion voir e.g. Chap. 8 et 9 de Arnold (1989) et Chap. 4 et 10 Frankel (1998).

après une très brève ouverture sur les développements associés aux géodésiques au XIX et XX^{ème} siècle, nous présenterons nos conclusions.

2 Aux origines : la courbe brachistochrone

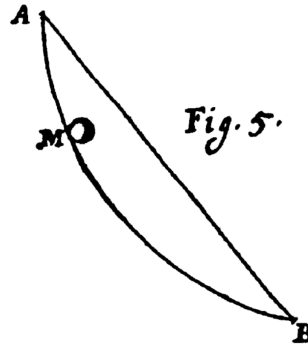


FIGURE 1 – Illustration du problème de la courbe brachistochrone dans l'article original de Jean Bernoulli (1696) (pris ici dans Goldstine (1991) p. 212).

L'étude moderne des courbes géodésiques a été propulsée sur le devant de la scène mathématique suite à l'étude du cas particulier des trajectoires minimisant le temps mis par un objet soumis à son propre poids pour se déplacer entre deux points : le problème mécanique dit de la courbe brachistochrone, du grec brákhistos (βράχιστος) "le plus court" et khrónos (χρόνος) "temps". Comme défendu entre autres par Woodhouse (1810) et Cantor (1898), la naissance du calcul des variations et de l'approche moderne des problèmes de minimisation peut en effet être associée à l'étude des courbes brachistochrones à partir du mois de juin 1696³. C'est donc ici que nous commencerons l'investigation qui nous mènera jusqu'aux géodésiques. Dans l'appendice de son papier "Problema novum ad cuius solutionem invitatur" contenue dans la revue Acta Eruditorum de 1696 (p. 264 à 269), le mathématicien et physicien Suisse Jean (ou Johann) Bernoulli (1667-1748) défie ainsi les géomètres de résoudre le problème suivant :

**Problema novum ad cuius solutionem Mathematici
invitantur.**

*Datis in plano verticali duobus punctis A & B (vid Fig. 5) TAB. V.
assignare Mobili M, viam AMB, per quam gravitate sua descendens & Fig. 5.
moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum
punctum B.*

**Ut harum rerum amatores instigentur & propensiori animo
ferantur ad tentamen hujus problematis, sciant non consistere in nuda
speculatione, ut quidem videtur, ac si nullum haberet usum ; habet
enim maximum etiam in aliis scientiis quam in mechanicis, quod nemo
facile crediderit. Interim (ut forte quorundam præcipiti iudicio obvi-
am eam) quanquam recta AB fit brevissima inter terminos A & B,
non tamen illa brevissimo tempore percurritur ; sed est curva AMB
Geometris notissima, quam ego nominabo, si elapso hoc anno nemo
alius eam nominaverit.**

3. Voir également Stäckel (1893), Carathéodory (1937) et Freguglia (2016) qui ont servi de sources secondaires pour cet essai, ainsi que les sources primaires associées.

”Problème nouveau que les mathématiciens sont invités à résoudre :

Soient deux points A et B dans un même plan vertical, trouvez le chemin AMB selon lequel un point mobile M descendant sous l’effet de son propre poids se déplace de A à B dans l’intervalle de temps le plus court possible (figure 1).

*Pour exciter le désir de chercher une solution à ce problème chez les amateurs de telles choses, il peut être noté que la question proposée n’est pas, comme il pourrait sembler, une simple spéculation sans intérêt. Au contraire, comme personne ne le croirait au premier abord, ce problème est très utile dans d’autres branches des sciences comme la mécanique. En attendant (pour éviter les jugements hâtifs), on peut remarquer que même si la ligne droite AB est bien le chemin le plus court entre A et B , ce n’est pas le chemin qui prends le moins de temps. Néanmoins, la courbe AMB , dont je donnerai le nom si personne ne la découvre d’ici la fin de l’année, est bien connue des géomètres.*⁴

Notons que ce format de défis donnés à la communauté est caractéristique de la recherche en mathématiques du XVI^{ème} qu XVIII^{ème} siècle en Europe. Bernoulli déclarera d’ailleurs *” Suivant l’exemple donné par des hommes comme Pascal, Fermat, etc., j’espère gagner la gratitude de toute la communauté scientifique en proposant aux meilleurs mathématiciens de notre époque un problème qui testera leurs méthodes et la force de leur intelligence.”*⁵

En parallèle, Jean Bernoulli envoie également le problème à son mentor et ami Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), dans une lettre privée⁶ datée du 9 juin 1696, à laquelle celui-ci répond le 16 juin – soit une semaine plus tard – annonçant avoir trouvé l’équation différentielle solution du problème sans avoir pour autant pu reconnaître la courbe décrite par celle-ci. Dans sa lettre à Bernoulli, Leibniz déclarera avoir été immédiatement attiré par le problème contre sa volonté, hésitant à s’y atteler à cause de sa beauté, comme Eve devant la Pomme. Bernoulli reprendra d’ailleurs cette référence biblique, déclarant être heureux de cette comparaison, à condition de ne pas être associé au serpent ayant offert le fruit. Pendant ce temps, d’autres mathématiciens essaient et échouent à résoudre le problème. À Paris, Pierre Varignon (1654-1722), déclare avoir été *”d’emblée rebuté par sa difficulté”*⁷. Le marquis de L’Hôpital (1661-1704) répond directement à Bernoulli que *”[le problème est] parmi les plus curieux, les plus jolis que quiconque lui ait proposé jusqu’ici”*, mais qu’il lui sera nécessaire de *”le réduire à des mathématiques pures avant qu’il ne puisse s’y attaquer, car la physique l’embarrasse”*⁸. Après 6 mois, il ne peut qu’envoyer une solution de seconde main à Joseph Sauveur (1653-1716) qui s’avèrera inexacte⁹. Une fois la date butoir atteinte, seuls Jean Bernoulli et Leibniz ont obtenu une solution et il est alors proposé par Leibniz de reporter la date limite afin que d’autres scientifiques aient le temps de s’y atteler (la publication de Acta Eruditorum aurait pris du temps et Bernoulli aurait voulu atteindre d’autres scientifiques étrangers tels qu’Isaac Newton (1643-1727)). En janvier 1697, Bernoulli proclame alors sa décision de reporter dans une annonce d’Acta Eruditorum de décembre 1696 et dans un texte intitulé *”Programma”* publié à Groningen¹⁰.

Cinq solutions seront publiées l’année suivante dans le numéro d’Acta Editorium de mai 1697, accompagnées d’une introduction générale et historique au problème rédigée par Leibniz. Ce dernier ne publiera pas sa solution, car il la déclarera identique à celle des frères Bernoulli. On trouvera alors les solutions de Jean Bernoulli, de son frère Jacques (ou Jakob) Bernoulli (1655-1705), du marquis de L’Hôpital, une autre d’Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (1651-1708) et une solution anonyme que Bernoulli reconnaîtra être celle de Newton (*”malgré son excès de modestie [...] on a reconnu le*

4. Traduction personnelle à partir de la traduction en anglais de Jean Bernoulli (1696) par L. La Paz dans Smith (1929) p.645.

5. Traduction personnelle, plus haut dans Jean Bernoulli (1696)

6. Toutes les correspondances entre Bernoulli et Leibniz peuvent être trouvées numérisées à l’adresse suivante : <https://leibniz.uni-goettingen.de/persons/view/55>, dans l’onglet *”Korrespondenz”*. Pour une discussion sur l’apport de Leibniz au problème de la brachistochrone, voir également Knobloch (2012) et Blasjo (2017).

7. Citation prise dans Dubois (1991) (p.1268). Voir références associées.

8. Ibid.

9. Sur la contribution de L’Hôpital et sa possible tricherie pour pouvoir résoudre le problème à temps, voir Peiffer (1989).

10. Voir la traduction complète en anglais dans Smith (1929) p.646 à 648.

lion à sa griffe ¹¹”).

Le problème de la courbe brachistochrone ainsi proposé n’est cependant pas nouveau (comme celui des courbes minimisante en général). Cependant, on peut facilement argumenter qu’il prend ici une dimension nouvelle, en particulier par les méthodes employées pour le résoudre. Galilée s’était déjà intéressé au problème de la brachistochrone dans la troisième journée de ”Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze” (Galilée 1638). Dans son étude de la chute des corps, il établira notamment que la vitesse v d’un corps en chute libre est proportionnelle à la racine carrée de la différence d’altitude y qu’il a parcouru ($v = \kappa\sqrt{y}$) ¹², ainsi que la relation importante qui nous resservira ¹³

$$\frac{t_h}{t_l} = \frac{h}{l} \tag{1}$$

où t_l est le temps mis par un corps pour tomber sous l’action de son propre poids sans vitesse initiale le long d’un plan incliné de hauteur h et de longueur l , et t_h est le temps mis par un corps pour tomber en chute libre de la même hauteur h . Il démontre également qu’une trajectoire en demi-cercle est plus courte qu’une trajectoire en ligne droite pour rejoindre les points A et B , mais n’affirme pas qu’il s’agit là de la brachistochrone, car il n’est en fait pas en moyen de pouvoir résoudre le problème avec les mathématiques de son temps ¹⁴.

Résoudre un tel problème demandera en effet l’utilisation du tout jeune calcul différentiel récemment inventé indépendamment par Leibniz (en 1675 ¹⁵ et Newton (de 1664 à 1666) ¹⁶. Les deux mathématiciens présenteront des approches conceptuellement et stylistiquement différentes reconues ultérieurement comme équivalentes ¹⁷, qui pourront démontrer toute leur puissance à travers les problèmes de minimisation tels que ceux proposés par Jean Bernoulli (et plus tard par Jacques Bernoulli, comme nous le verrons). Le calcul différentiel sera ensuite massivement re-employé par des scientifiques tels que Leonhard Euler (1707-1783) pour devenir un outil (sinon l’outil) central au cœur des mathématiques modernes et des sciences physiques.

L’essence de ce nouveau formalisme se présente généralement aujourd’hui en suivant l’approche et les notations de Leibniz, telles qu’utilisées et défendues par les frères Bernoulli. Soit ainsi la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow y(x)$. On s’intéresse à des variations locales et infinitésimales de la courbe dy , associées à des changements infinitésimaux des abscisses dx . On peut alors définir la tangente – ou dérivée de y en fonction de x – en chaque point de la courbe comme

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}. \tag{2}$$

Comme nous le démontrerons dans la suite, $y'(x)$ informe sur le comportement de la courbe et fournit un outil puissant pour en inférer ces propriétés. Notamment, la valeur de $y'(x)$ au point x quantifie l’augmentation ($y'(x) > 0$), la diminution ($y'(x) < 0$) ou la stabilité ($y'(x) = 0$) de $y(x)$ en ce point,

11. Lettre à Henri Basnage de Beauval (1656-1710), Mars 1697

12. En termes modernes, on aurait $\kappa = \sqrt{2g}$, où $g \simeq 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ est l’accélération de pesanteur terrestre. Ce résultat ce démontre en mécanique du point Newtonienne, en considérant la conservation de l’énergie mécanique ($\mathcal{E} = mv^2/2 - mgy$) entre le point (x, y) et le point de départ à l’origine de l’énergie potentielle et à vitesse nulle ($\mathcal{E} = 0$) ou en intégrant deux fois le principe fondamental de la dynamique $m\ddot{y} = mg$ et en insérant $t(y)$ dans $v(t)$ (où $t \in \mathbb{R}$ est le temps).

13. On peut démontrer cette relation dans le cadre de la mécanique du point en utilisant la conservation de l’énergie ou le principe fondamental de la dynamique pour dériver $t_l = \sqrt{2l}/\sqrt{hg}$ et $t_h = \sqrt{2h/g}$, prouvant (1).

14. Il est souvent affirmé de manière erroné que Galilée pensait que l’arc de cercle était la solution au problème de la brachistochrone. Cette affirmation, encore rependue aujourd’hui, a été énoncée dans l’introduction historique de Leibniz. Pour une clarification voir les discussions détaillées dans Knobloch (2012) (p.17) et Freguglia (2016) (Sec. 1.2.5.).

15. Voir l’article clef publié dans le volume d’Acta Eruditorum de 1684 (Leibniz 1684).

16. Voir l’article fondateur sur l’expansion en série (Newton 1669).

17. Comme noté dans Freguglia (2016), à ces débuts le calcul différentiel n’avait évidemment pas la forme qu’il possède aujourd’hui et la résolution des problèmes impliquait souvent un mélange de méthodes analytiques et géométriques. Nous renvoyons encore à Freguglia (2016) pour de nombreuses illustrations historiques éclairantes que nous ne pourrions malheureusement pas retranscrire ici. Sur l’apparition et le développement du calcul différentiel voir également Boyer (1959).

d'où l'importance centrale de cet outil pour toutes les disciplines étudiant l'évolution des systèmes dynamiques.

3 La cycloïde comme solution du problème de la brachistochrone

La solution de la brachistochrone est donnée par une courbe appelée "cycloïde" dont nous allons maintenant brièvement présenter les propriétés ainsi que l'historique¹⁸. Nous détaillerons ensuite les principaux éléments des solutions données par les frères Bernoulli. Un rappel des propriétés trigonométriques utilisées pour dériver les propriétés de la courbe présentées dans le texte est donné en Appendice A.

3.1 Définition générale et bref historique

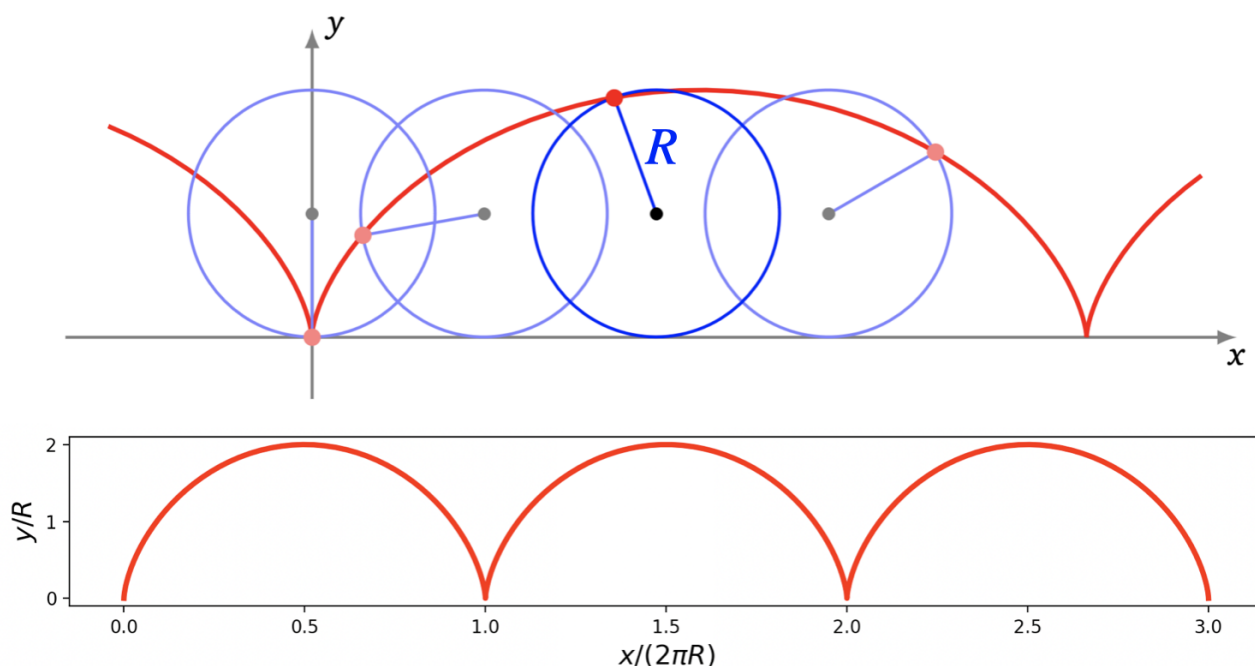


FIGURE 2 – Haut : courbe cycloïde (rouge) définie comme le tracé d'un point attaché à un cercle de rayon R (bleu) roulant à vitesse constante (Adapté librement de http://exo7.emath.fr/cours/ch_courbes.pdf). Bas : Tracé de la cycloïde dans le plan $(x/(2\pi R), y/R)$ (Toute image non sourcée présente dans le texte a été générée à partir d'un code python personnel disponible à l'adresse suivante : <https://github.com/LeoVacher/LeoVacher.github.io/blob/master/files/cycloid.py>).

La Cycloïde – du grec kuklos (κύκλος) "cercle" et eidos (εἶδος), "forme, aspect" – également appelée roue d'Aristote ou roulette de Pascal – est une courbe plane¹⁹ transcendante²⁰. Elle correspond à la trajectoire – par rapport à un référentiel immobile au sol – d'un point fixé au rayon R d'un cercle qui roule sans glisser à vitesse constante sur une droite (voir partie haute de la figure 2).

18. Pour des compléments sur les propriétés mathématiques et l'historique de la cycloïde, nous renvoyons également à Khelif (2010) p.185 et au Chap. 1.4 de Freguglia (2016) respectivement.

19. Courbe en deux dimensions dans le plan \mathbb{R}^2 , dont l'équation est souvent donnée en coordonnées cartésiennes suivant deux axes orthogonaux (x, y) .

20. Courbe qui n'est pas algébrique i.e. qui ne peut pas s'écrire comme le zéro d'un polynôme $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n + \beta_n y^n + \kappa = 0$ (courbe algébrique plane affine) ou comme la projection dans le plan d'une courbe algébrique affine en dimension supérieure (courbe algébrique plane projective).

Ces équations paramétriques en fonction d'une paramétrisation linéaire $\tau \in \mathbb{R}$ sont données en coordonnées cartésiennes par

$$\begin{cases} x(\tau) &= R(\tau - \sin(\tau)), \\ y(\tau) &= R(1 - \cos(\tau)). \end{cases} \quad (3)$$

Comme présenté sur la partie basse de la figure 2, la cycloïde se présente comme une courbe $y(x)$ périodique ayant un maximum correspondant au diamètre du cercle générateur ($y = 2R$) et se répétant tous les $2\pi R$ après des transitions brutales de tendance appelées points de rebroussement (en $y = 0$).

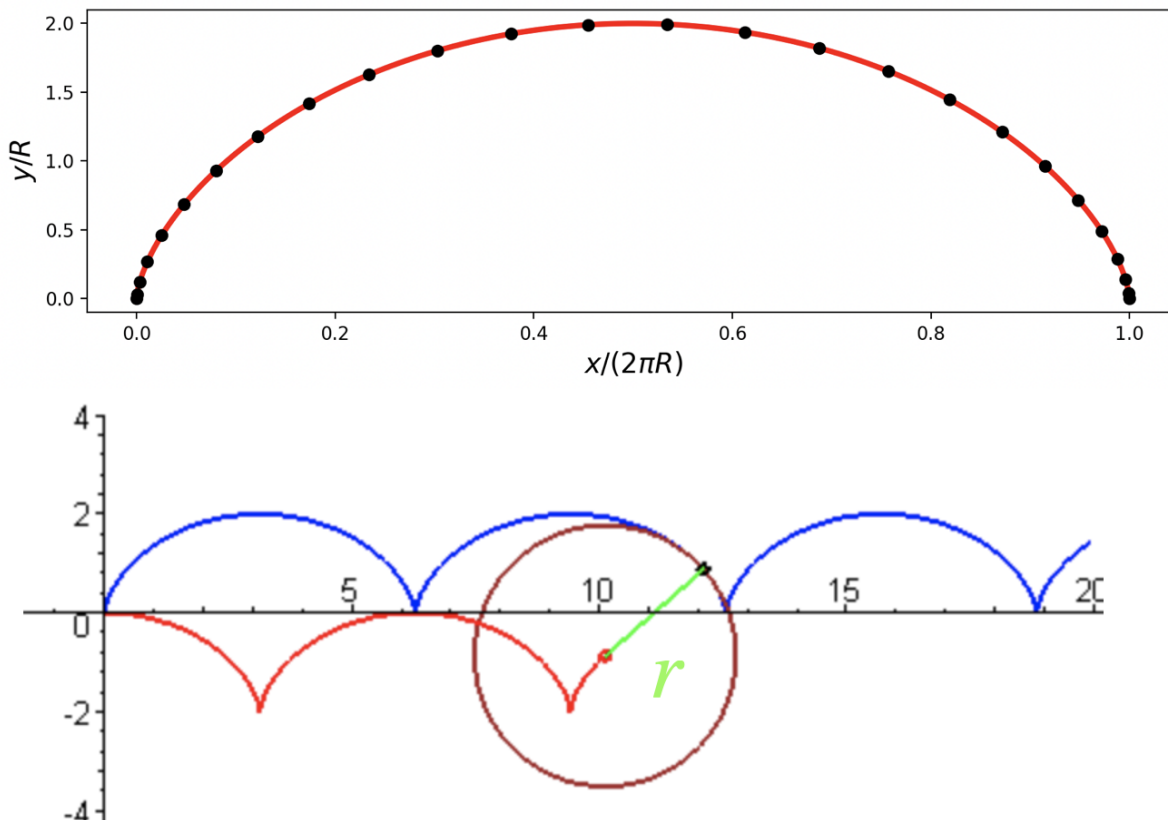


FIGURE 3 – Propriétés de la cycloïde Haut : arc de cycloïde sur lequel apparait la paramétrisation en τ , où un point noir est placé tous les $\Delta\tau = 0.25$. Bas : rayon de courbure r (vert) sur un point de la cycloïde (bleue) et sa développée (rouge) (adapté librement de wikimedia commons).

La dérivée de l'intervalle de longueur s en chaque point de la courbe s'exprime comme²¹

$$s'(\tau) = \frac{ds}{d\tau} = 2R \sin(\tau/2), \quad (4)$$

et son un rayon de courbure, correspondant au rayon d'un cercle épousant maximale la courbe au point paramétrisé par τ , est donné par²²

$$r(\tau) = 4R \sin(\tau/2). \quad (5)$$

21. Avec l'élément infinitésimal de longueur de la courbe ds défini comme $ds^2 := dx^2 + dy^2$. A partir des équations paramétriques de la cycloïde, on obtient alors facilement $ds^2 = R^2 ((1 - \cos(\tau))^2 + \sin^2(\tau)) d\tau^2 = 2R^2(1 - \cos(\tau))d\tau^2$, retrouvant alors équation (4) en utilisant la relation trigonométrique $\cos(\tau) = 1 - 2\sin^2(\tau/2)$.

22. Soit la courbe plane $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \tau \rightarrow (x(\tau), y(\tau))$, alors, en coordonnées cartésiennes, $r = (x'^2 + y'^2)^{3/2} / (x'y'' - y'x'')$.

$s'(\tau)$ et $r(\tau)$ s'annulent pour $\tau = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, qui correspondent aux points de rebroussement et sont maximums pour $\tau = \pi(2k-1)$, correspondant aux sommets de la courbe. Pour $s'(\tau)$ on comprend que les points séparés par des intervalles constants de τ sont plus rapprochés aux points de rebroussement et maximalelement distants les uns des autres sur la courbe au niveau des sommets (voir illustration en haut de la figure 3). Autrement dit, si τ représente le temps, le point ralentit (par rapport au sol) aux points de rebroussement, où le mouvement de rotation du cercle s'oppose à sa translation, et accélère aux sommets, où la rotation se combine à la translation. Le rayon de courbure, lui, est nul aux points de rebroussement et a une valeur maximale au sommet, où un cercle de rayon $4R$ peut complètement englober l'arche. Ainsi, la développée de la cycloïde, i.e. la trajectoire tracée par ses centres de courbures, est une cycloïde translatée de $\Delta x = \pi R$ (voir bas de la figure 3). La longueur totale d'une arche de la cycloïde ($\int_0^{2\pi} ds(\tau)$ entre deux points de rebroussement) vaut $8R$ et sa surface (quadrature) est exactement trois fois celle du cercle générateur ($3\pi R^2$).

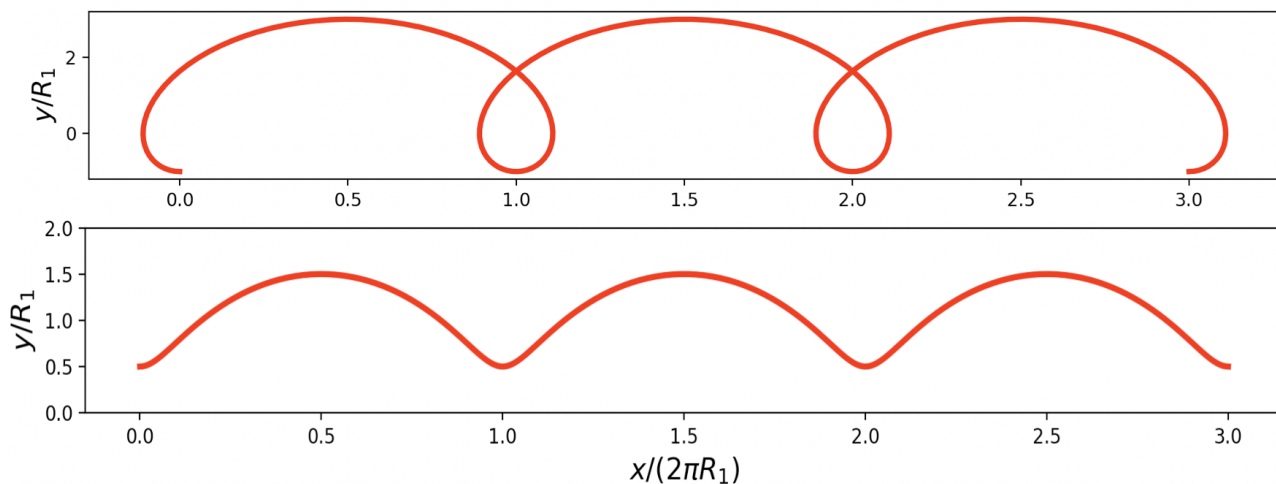


FIGURE 4 – Haut : trochoïde allongée bas : trochoïde raccourcie.

La cycloïde représente un cas particulier de courbe trochoïde – du grec ancien trokhoeidês (τροχοειδής), "circulaire, rond" – représentant la trajectoire d'un point attaché à une position arbitraire de rayon R_2 sur un cercle de rayon R_1 roulant sans glissement sur une droite²³ (voir Khelif (2010) p. 468). Pour $R_1 < R_2$ on parle de trochoïde raccourcie présentant des points d'inflexions alors que pour $R_1 > R_2$ on parle de trochoïde allongée, formant des boucles. La cycloïde correspond au cas $R_1 = R_2$.

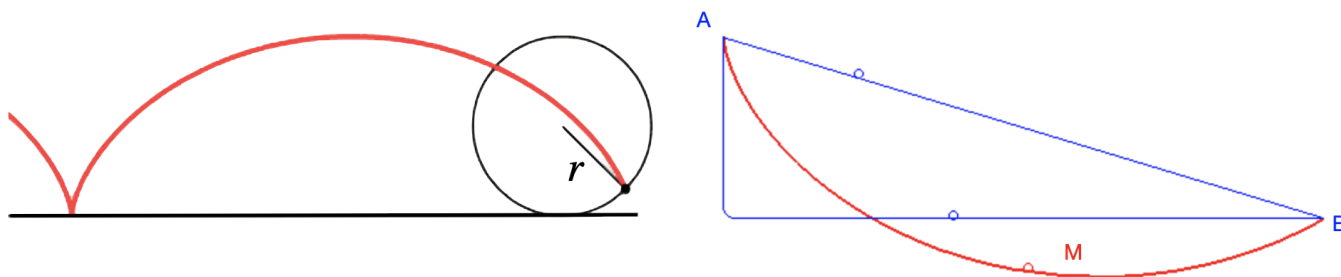


FIGURE 5 – Gauche : Cycloïde (rouge) comme solution du problème de la brachistochrone. Droite : Cycloïde (noir) comme solution du problème de la tautochrone (Adapté librement de wikimedia commons).

23. $x(\tau) = R_1\tau - R_2\sin(\tau)$ et $y(\tau) = R_1 - R_2\cos(\tau)$

La cycloïde peut être caractérisée par l'équation différentielle (équations liant la fonction et ses dérivées)

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2R - y}{y}}, \quad (6)$$

qui sera l'équation à laquelle arrivera Leibniz sans en reconnaître la courbe. Une preuve en quelques étapes de cette équation peut être trouvée en appendice B.

Le nom de la cycloïde a été donné par Galilée, qui fut certainement le premier scientifique moderne à étudier en profondeur les propriétés de cette courbe (Whitman 1943)²⁴. Il a en particulier cherché à en déterminer la quadrature. Pour cela, il aurait utilisé des constructions matérielles l'amenant à estimer que la surface totale de l'arche équivalait à trois fois celle du cercle générateur. Cette propriété fut prouvée formellement plus tard par Gilles Personne de Roberval (1602-1675) en 1634 mais les résultats ne furent publiés que plus tard, 18 ans après sa mort (Roberval 1693).

Comme nous l'avons déjà évoqué, la cycloïde (inversée) est la solution au problème de la Brachistochrone présenté précédemment (voir schéma de gauche de la figure 5). Avant le problème proposé par Bernoulli, la cycloïde était déjà au centre de l'attention des mathématiciens et physiciens, car identifiée comme solution de nombreux problèmes similaires.

Elle est en effet également solution au problème de la courbe dite tautochrone (du grec *tauto* (ταυτός) "identique" et *chronos* (χρόνος) "le temps") : soient deux point *A* et *B* reliés par une cycloïde, le temps mis pour atteindre *B* est indépendant du point de la courbe d'où est lâché une particule soumise uniquement à son propre poids sans vitesse initiale. Cette propriété fut prouvée par le mathématicien physicien et astronome néerlandais Christiaan Huygens (1629-1695) en 1673 (Huygens 1673). Comme illustré sur le schéma de droite de la figure 5, les différentes particules placées à des points différents de l'arche d'une cycloïde inversée (représentées par des ronds de différente couleur) atteindront le sol au même instant (voir les $s(t) = \int_0^t ds(t)$ correspondants dans le coin droit de la figure). Cela s'explique car les particules les plus hautes (e.g. bleue) peuvent accélérer pendant plus longtemps que celles qui partent plus bas (e.g. jaune). Après avoir donné sa solution, Jean Bernoulli en conclura que "*L'identité de la tautochrone de Huygens et de la brachistochrone est admirable : la nature agit toujours de la manière la plus simple !*"²⁵.

En conséquence directe de sa propriété tautochrone, la cycloïde est également isochrone (du grec *isos* (ἴσος), "égal") : une particule lâchée sur une arche de cycloïde suivra un mouvement périodique dont la période est indépendante du point d'où elle est lâchée ($T = 2\pi\sqrt{4R/g}$). A partir de cycloïdes, on peut ainsi construire des pendules très fiables (dits "cycloïdaux") ayant une période fixée quelque soit l'endroit d'où est lâché le balancier²⁶. Cette propriété fut notamment utilisée en navigation pour aider à résoudre le problème des longitudes (voir e.g. Yoder (1988)).

On peut également montrer que la cycloïde est la trajectoire décrite par une particule chargée en présence de champ électrique et magnétique perpendiculaires et uniformes (Bruce 1997) et que la courbe apparait plus généralement comme solution à de nombreux problèmes d'optique et de mécanique (voir e.g. Johnston (2018)). Pour toutes ces raisons, il est évident que la cycloïde a joué un rôle central dans les mathématiques et sciences physiques du XVII^{me} siècle, tant bien qu'elle fut nommée "l'Hélène des géomètres" (Montucla, Lalande et Lande 1799) en référence à Hélène de Troie : d'une grande beauté, mais à l'origine de nombreux conflits !

3.2 Les solutions au problème de la Brachistochrone

Nous ne détaillerons pas toutes les solutions du problème de la brachistochrone ici, mais nous présenterons seulement des versions simplifiées et modernisées des dérivations proposées par Jean et

24. Étonnamment, on a toutes les raisons de croire que cette courbe n'était pas connue en Grèce antique. Sa première mention attestée fut par Charles de Bovelles en 1503 dans "Introductio in Geometriam" (voir Cantor (1898) et Whitman (1943)).

25. Citation empruntée à Dubois (1991) p.1273 (voir source primaire en référence).

26. Cette propriété est respectée pour le cas d'école du pendule simple seulement dans l'approximation des petits angles (inclinaison initiale $\theta_0 \lesssim 10^\circ$), on a alors la formule $T = 2\pi\sqrt{L/g}$.

Jacques Bernoulli afin de mettre en évidence le raisonnement des deux auteurs et leurs différences qui seront importantes pour la suite de la discussion.

3.2.1 Les solutions de Jean Bernoulli

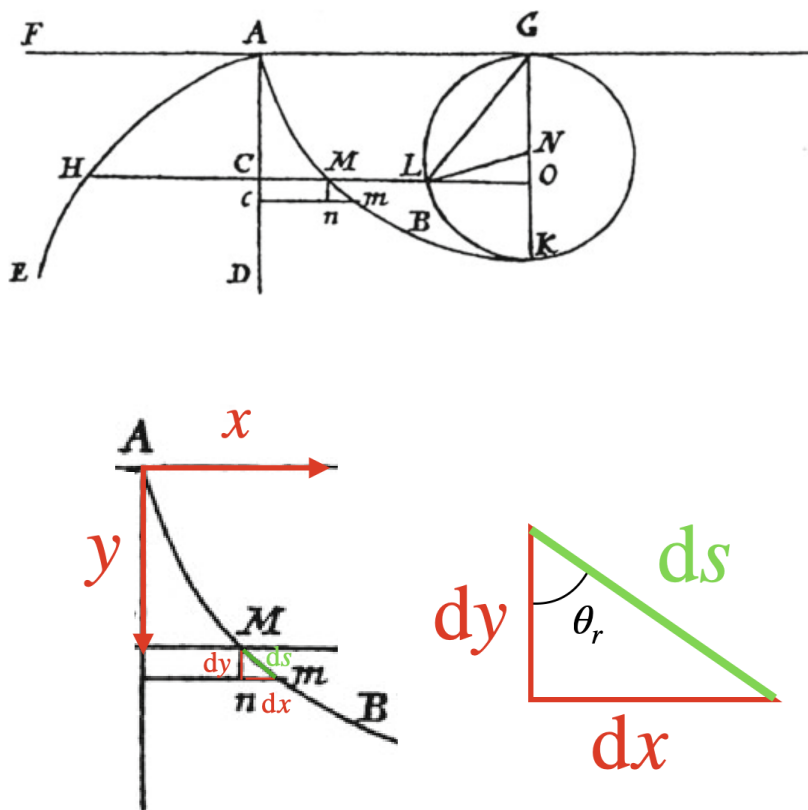


FIGURE 6 – Haut : Illustration originale du problème dans Jean Bernoulli (1697) Bas : adaptation personnelle mettant en évidence les éléments infinitésimaux mis en jeu.

La solution que Jean Bernoulli (1697) présente dans l'édition de 1697 de Acta Eruditorum se base sur un autre exemple de courbe minimisant le temps essentiel en physique : le trajet des rayons lumineux. Le comportement de la lumière peut en effet être modélisé par le tracé de rayons lumineux obéissant aux lois dites de "l'optique géométrique". En particulier, un rayon se déplace en ligne droite dans un milieu homogène (principe d'Heron), et à la transition entre deux milieux 1 et 2 (dioptre), il peut se réfléchir avec un angle identique à celui d'incidence par rapport à la normale ou se réfracter selon²⁷

$$\frac{\sin(\theta_1)}{v_1} = \frac{\sin(\theta_2)}{v_2}, \tag{7}$$

où θ_1 et θ_2 sont respectivement les angles d'incidence et de réfraction par rapport à la normale du dioptre et v_1 et v_2 sont les vitesses à laquelle se déplace la lumière dans les deux milieux. De cette loi, on peut conclure que, pour un rayon se déplaçant dans un milieu inhomogène, on a en tout point

$$\frac{\sin(\theta_r)}{v} = C. \tag{8}$$

où C est une constante et θ_r est l'angle de la trajectoire du rayon lumineux par rapport à la normale en tout point de sa trajectoire. L'ensemble des lois énoncées plus haut peuvent être retrouvées en

27. Afin de rafraichir des éventuels souvenirs de lycée ou d'université, on présente aujourd'hui plus couramment cette formule comme $n_i \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_2)$, en utilisant les indices optiques $n_i = c/v_i$.

exigeant que le rayon lumineux suive toujours la trajectoire minimisant le temps de parcours de la lumière, appelé principe de Fermat. Ce résultat a été démontré par Heron d’Alexandrie au premier siècle dans *Catoptrics* pour la réflexion et par Ibn al-Haytham pour la réfraction au 11^{ème} siècle. Comme pour le cas de la brachistochrone, c’est grâce aux récents développements des outils du calcul des variations que Pierre de Fermat (1607-1665) pourra démontrer en toute généralité ce principe de manière moderne en 1657 (et publié en 1662), soit 40 ans avant l’étude de la brachistochrone par Bernoulli (sur l’histoire du principe de Fermat voir Rashed (2019) et les références associées).

Retournons maintenant au problème de la brachistochrone et plaçons nous dans le cadre du haut de la figure 6, où le mobile M descend de A à B . Afin de rester cohérent avec les notations précédentes, on choisit un repère (x, y) où l’axe y est vertical et x horizontal, comme illustré en bas à gauche de la figure 6 (le choix original de Bernoulli inversait les axes x et y pour que le repère soit direct). En prenant un point M quelconque de la trajectoire, on peut définir les petits éléments de longueurs dx , dy et ds , approximés comme des segments de droites. Dans le triangle rectangle formé par ces trois infinitésimaux, la trigonométrie élémentaire nous permet d’établir la relation

$$\frac{dx}{ds} = \sin(\theta_r), \quad (9)$$

où θ_r est l’angle entre la trajectoire du point M et l’horizontal HO . En assumant que la même condition s’applique pour les rayons lumineux (équation (8)), on a alors

$$\frac{dx}{ds} = Cv. \quad (10)$$

Bernoulli invoque alors les résultats de Galilée sur la chute des corps selon lesquels, pour un corps soumis à son propre poids $v = \kappa\sqrt{y}$. On a alors un comportement similaire à celui d’un rayon lumineux se déplaçant dans un milieu transparent dont la densité est inversement proportionnelle à la racine carrée de la hauteur.

Grâce aux conditions initiales, on peut alors déterminer C : la particule atteindra sa vitesse maximale en $y = \overline{GK}$ où sa trajectoire sera horizontale ($\theta_r = 0$) (voir haut de la figure 6). D’après (8), on a alors $C = 1/(\kappa\sqrt{\mathcal{D}})$, où on a introduit $\mathcal{D} = \overline{GK}$.

En utilisant alors la définition de l’élément de longueur $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (qui n’est autre que le théorème de Pythagore), équation (10) devient

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \sqrt{\frac{y}{\mathcal{D}}}. \quad (11)$$

En mettant le tout au carré et après quelques manipulations, on arrive immédiatement à

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{\mathcal{D} - y}{y}}, \quad (12)$$

que l’on identifie comme l’équation différentielle d’une cycloïde générée par un cercle ayant pour diamètre la hauteur totale de chute du corps (équation (6)) avec $R = \mathcal{D}/2$. Quelque chose d’absolument caractéristique se produit ici : on ”coupe” le problème en petits éléments finis afin d’en tirer des conclusions générales est typique du calcul différentiel prenant naissance ici, qui est aujourd’hui le pain quotidien des physiciens et mathématiciens.

La solution présentée ci-dessus est appelée ”indirecte” par Jean Bernoulli. Il proposera une seconde solution, que nous ne détaillerons pas ici, dite ”directe”, qu’il donnera dans plusieurs correspondances au cours de 1697. Cependant, Leibniz lui conseillera de retarder sa publication, car ” [il] trouva cette Methode directe d’une beauté si singuliere, qu’il me conseilla de ne la pas publier, pour de raisons qui étoient alors, & qui ne subsistent plus”²⁸. Elle ne sera alors rendue publique qu’en 1718 dans l’appendice d’un papier dédié aux isopérimètres (Jean Bernoulli 1718). D’après Carathéodory (1937)

28. pris dans Jean Bernoulli (1718)

(voir p.230 à 233 et l'appendice III), cette deuxième solution, qui passera inaperçue car donnée en addendum d'un papier très technique portant sur un autre sujet, présente des aspects tout à fait novateurs qui ne seront redécouverts que au XIX^{ème} siècle lors du développement du calcul différentiel moderne (théorie des champs) par Karl Weierstrass (1815-1897) et Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

3.2.2 La solution de Jacques Bernoulli

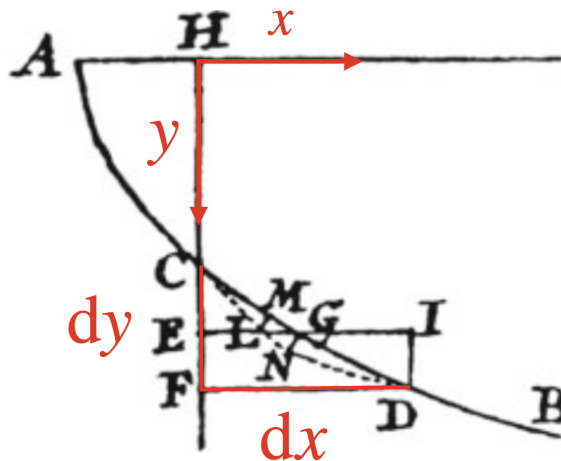


FIGURE 7 – Adaptation de la figure originale de Jacques Bernoulli (1697) sur laquelle ont été ajouté en rouge les axes (x, y) et leurs différentiels (dx, dy) .

La solution présentée par Jacques Bernoulli (1697) est relativement plus technique que celle de son frère et invoque des infinitésimaux d'ordre deux, associés aux dérivées secondes. Elle exploite une autre propriété cruciale pour le calcul des variations : un extrémum d'une courbe (minimum, maximum ou point-selle) est atteint lorsque les dérivées secondes (ou les différences entre infinitésimaux d'ordre deux) s'annulent. On pourra alors comparer différentes courbes infiniment proches l'une de l'autre afin d'identifier la "région" dans laquelle les propriétés ne varient pas d'une courbe à l'autre pour des différences d'ordre deux²⁹.

Jacques commence ainsi sa preuve en montrant que si la propriété de minimisation du temps est vérifiée sur un élément infinitésimal de la courbe, elle est aussi vérifiée pour toute la courbe (encore ici une démarche caractéristique du calcul des variations). Cela lui permettra donc encore d'inférer la nature de la courbe à partir de propriétés valides localement. Il procède ensuite comme suit : comme illustré sur la figure 7, soit CD un élément de longueur infinitésimal de la brachistochrone et soient CLD et CGD deux trajectoires infiniment proches séparées par une distance NM du second ordre localisés au milieu de l'intervalle $(CD/2)$. Si la courbe est bien la brachistochrone i.e. la courbe minimisant le temps, alors la différence entre les temps infinitésimaux du second ordre doit s'annuler et les deux trajectoires doivent prendre le même temps i.e. $t_{CG} + t_{GD} = t_{CL} + t_{LD}$ ou encore $t_{CG} - t_{CL} = t_{LD} - t_{GD}$. De plus, en utilisant la loi des plans inclinés de Galilée (équation (1)), on a $CE/CG = t_{CE}/t_{CG}$ et $CE/CL = t_{CE}/t_{CL}$. En combinant ces relations, on obtient alors

$$\frac{CE}{CG - CL} = \frac{t_{CE}}{t_{CG} - t_{CL}}. \tag{13}$$

29. Cette manière de raisonner est aujourd'hui omniprésente dans toutes les branches de la physique afin de trouver des trajectoires extrémales e.g. à l'aide des intégrales de chemins en électrodynamique quantique, voir e.g. l'introduction non technique donnée dans Feynman (1988)

Considérons maintenant le projeté orthogonal M de L sur CG . On a alors $CG - CL \simeq MG$, car, en utilisant un développement limité à l'ordre un

$$CL = \sqrt{CM^2 + ML^2} = CM\sqrt{1 + ML^2/CM^2} \simeq CM + ML^2/(2CM) \simeq CM. \quad (14)$$

De plus, le théorème de Thalès donne $EG/CG = MG/GL$. Combinant toutes ces relations avec l'équation (13) et multipliant par $t_{CG} - t_{CL}$, on obtient

$$\frac{CE}{GL} = \frac{EG t_{CE}}{CG(t_{CG} - t_{CL})}. \quad (15)$$

Le même raisonnement sur le projeté orthogonal N de G sur LD conduit à

$$\frac{EF}{GL} = \frac{GI t_{EF}}{CD(t_{LD} - t_{GD})}. \quad (16)$$

En comparant ces deux dernières relations et en réinjectant l'équation (13), on peut alors montrer que :

$$\frac{EG t_{CE}}{CG(t_{CG} - t_{CL})} = \frac{GI t_{EF}}{GD(t_{LD} - t_{GD})} = \frac{CG}{CD}, \quad (17)$$

et

$$\frac{EG t_{CE}}{GI t_{EF}} = \frac{CG(t_{CG} - t_{CL})}{GD(t_{LD} - t_{GD})} = \frac{CG}{CD}. \quad (18)$$

Or, comme nous l'avons déjà vu dans la solution de Jean, Galilée a montré que pour un corps en chute libre $v = \kappa\sqrt{y}$ avec y la distance parcourue en chute libre i.e. depuis le point H . Les intervalles CE et EF étant infiniment petits, on peut dire que $v_{CE} \simeq v_C \simeq CE/t_{CE}$ et $v_{EF} \simeq v_E \simeq EF/t_{EF}$ (et $CE = EF$). On obtient ainsi

$$\frac{EG t_{CE}}{GI t_{EF}} = \frac{EG/\sqrt{HC}}{GI/\sqrt{HE}}. \quad (19)$$

En insérant cette dernière expression dans l'équation (18), on obtient enfin

$$\frac{EG\sqrt{HE}}{\sqrt{HCGI}} = \frac{CG}{GD}. \quad (20)$$

En plaçant maintenant un système d'axes (H, x, y) comme dans la section précédente, on peut identifier $HE = y$ et les infinitésimaux d'ordre un $dx = FD = 2EG$, $dy = CF = 2EG$ et $ds = CD = 2CG$, l'équation précédente se réécrit

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{y}{\mathcal{D}}}. \quad (21)$$

En notant $\mathcal{D} = HCGI^2/GD^2$. Il s'agit donc de l'équation (11), que l'on peut réécrire comme l'équation différentielle d'une cycloïde.

4 La rivalité des deux frères et les isopérimètres

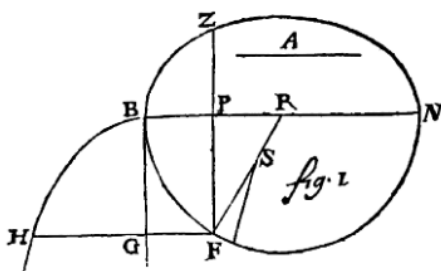
Les deux solutions présentées plus haut font appel au même principe, au cœur du calcul différentiel : dériver des propriétés locales – sur des éléments infinitésimaux de la courbe considérés comme linéaire – et en tirer des résultats globaux sur la nature même de la courbe. Cependant, il est frappant de voir à quel point les deux preuves diffèrent tant par leur raisonnement que par leur style. Formellement, Jean fait toute son analyse avec des infinitésimaux d'ordre un, regardant de petits éléments de la courbe, quand Jacques regarde aussi des infinitésimaux d'ordre deux, comparant différentes courbes infiniment proches pour chercher celle qui minimise le temps. Il est communément reconnu que la solution de Jean est d'une grande simplicité et d'une grande élégance, en suivant une

analogie avec de la physique élémentaire. Pour reprendre Peiffer (2006), "elle relève du trait de génie". Cependant, elle ne s'applique qu'à ce cas particulier et n'est pas généralisable à d'autres problèmes.

Jacques lui, procède de manière plus rigoureuse, linéaire et systématique. Sa dérivation est détaillée mais longue à mettre en œuvre et les calculs sont fastidieux. Sa méthode est généralisable et peut être appliquée à n'importe quelle courbe extrémisante une quantité. Cette opposition dans le style reflète déjà une opposition même entre les deux frères. Alors que pour Jacques, les astuces de son frère ne méritent pas le nom de méthode, pour Jean, la direction empruntée par son frère est "[...] un chemin très-rude & très épineux, [alors que la Fortune] m'a été si favorable qu'elle m'a mené par une voye douce, très-courte & très aisée, par laquelle j'ai même plus trouvé que je ne cherchois" (Goldstine (1991) p.289). Pour mieux comprendre cette situation, il faut également comprendre la relation entre les deux frères : Jacques, l'ainé, s'est toujours considéré comme le mentor et l'exemple à suivre pour son petit frère. Il considère alors Jean "comme un élève qui doit gratitude et respect à son maître³⁰". A l'opposé, Jean, "pour voler de ses propres ailes et déployer tout son talent, avait besoin de s'émanciper de son frère³¹".

Le problème de la brachistochrone lancé par Jean enflamme alors la rivalité déjà existante entre les deux frères et entraîne avec lui une longue série de querelles et de joutes publiques entre eux. Alors que le défi n'a sans doute pas eu un retour à la hauteur des espoirs et de la publicité que Jean en a fait, il s'attaque directement à son frère avec ce problème en le considérant « parmi ceux qui s'enorgueillissent d'avoir pénétré les mystères les plus profonds de la géométrie grâce à des méthodes particulières et d'avoir élargi son étendue par des théorèmes d'or qu'ils croient inconnus de tous, alors qu'ils ont été publiés bien avant par d'autres »³².

Jacques commence alors son papier de 1697 en déclarant (non sans mépris) qu'il ne se serait pas intéressé au problème de son frère si Leibniz ne l'y avait pas invité et qu'il l'a rapidement résolu en quelques semaines dès Octobre 1696 (trouvant une courbe solution qu'il appellera "l'oligochrone"). Après avoir donné la solution que nous avons détaillée plus haut, il conclut son papier en défiant son frère avec trois problèmes encore plus difficiles, déclarant qu'il connaît un gentleman qui offrirait à son frère un prix de 50 écus impériaux si celui-ci parvient à les résoudre dans les trois prochains mois. Parmi ces trois problèmes, c'est le troisième, dit des isopérimètres (courbes de même longueur) qui se montrera le plus difficile et qui sera au centre de l'attention de 1697 à 1718. Il s'énonce ainsi³³



D'entre toutes les courbes isopérimètres constituées sur un axe déterminé BN, on demande celle come BFN, qui ne comprend pas elle-même le plus grand espace; mais qui fasse qu'un autre compris par la courbe BZN soit le plus grand après avoir prolongé l'appliquée FP de sorte que PZ soit en raison quelconque multipliée ou soumultipliée de l'appliquée PF ou de l'arc BF, c'est-à-dire que PZ soit la tantième proportionnelle que l'on voudra d'une donnée A & de l'appliquée PF ou de l'arc BF.

À la suite naturelle de la brachistochrone, on voit alors apparaître encore ici un problème de courbe extrémisante : celle *BFN* qui augmente la surface de l'espace *BZN* lorsqu'elle est prolongée. Même si Jean prétend avoir trouvé la solution en trois minutes, il n'arrive pas à résoudre correctement

30. (Peiffer 2006)

31. ibid

32. Citation prise dans Peiffer (2006) (p.16), elle même issue de Goldstine (1991) (p.261).

33. Traduction en français du problème par Jean Bernoulli parue dans le Journal des sçavants de décembre 1697. Pris dans Goldstine (1991) p.309.

le problème posé par son frère. Commencera alors une longue querelle entre les deux frères, sous forme de joute, impliquant de nombreux autres mathématiciens (pour une discussion plus complète, voir Sec.2. de Peiffer (2006)). Les deux frères se connaissant intimement, chacun exploitera les faiblesses et les traits de caractère de l'autre. Bien qu'on ne puisse évidemment pas résumer la personnalité de deux mathématiciens en quelques phrases, on voit cependant clairement se dessiner deux profils opposés : Jean est impulsif, colérique et fougueux alors que son frère Jacques, froid et cynique, prend un plaisir presque cruel à relever publiquement les erreurs de son frère : "Avant que de publier ma Reponse aux solutions de mon Frere, je le prie de repasser tout de nouveau sur sa derniere, d'en examiner atentivement tous les points, & de nous dire ensuite si tout va bien ; lui declarant qu'apres que j'aurai done la miene, les pretextes de precipitation ne seront plus ecoutez" (Goldstine (1991) p.354). C'est donc dans ce contexte de rivalité et de défis mais également de pleine effervescence autour de l'application du nouveau calcul des variations à la recherche des courbes aux propriétés particulières, que va apparaitre le problème des courbes géodésiques.

5 De la brachistochrone aux géodésiques

5.1 Un nouveau défi

Dans la continuité directe du problème de la brachistochrone et des isopérimètres, Jean Bernoulli lance six nouveaux défis de minimisation "aux géomètres qui croient avoir des méthodes pour toutes les questions de cette nature" dans l'édition du Journal des Sçavant de 1697 p.394-396 (Académie des inscriptions et belles-lettres 1697). Le premier s'énonce comme suit³⁴

PROBLEMES A RESOUDRE.

VOICI quelques Problèmes *De maximis & minimis*, que M. Bernoulli Professeur à Groningue, propose aux Geometres qui croyent avoir des metodes pour toutes les questions de cete nature.

1. Deux points etant donés sur une superficie convexe, on demande une maniere d'y décrire Geometriquement d'un de ces points à l'autre, la ligne la plus courte, suposé que cete surface soit Geometrique, telles que sont celles de la sphere, du cone, du cylindre, dans lesquelles le problème est fort facile, de quelque maniere que les points soient situez; mais dans les conoides & dans les spheroides il devient tres-difficile. C'est pourquoi on propose pou rexemple la superficie du conoide parabolique, dans laquelle il faille tirer la ligne la plus courte qui joint deux points situez non pas dans le même meridien; ce qui seroit encore facile, puisque la ligne recherchée seroit la portion du même meridien comprise entre ces deux points; mais situez dans des meridiens diferens : J'apele ici *Meridien* toute parabole tirée du sommet du conoide jusqu'à sa base.

Il s'agit donc bien là de la question des lignes de plus courte distance sur une surface quelconque, qui apparait pour la première fois sur le devant de la scène mathématique moderne, comme conséquence naturelle des problèmes l'ayant précédé. Comme pour la brachistochrone, Bernoulli informe son mentor Leibniz de ce défi dans une lettre privée en décembre 1697, annonçant que l'Hôpital y a renoncé. Leibniz répondra qu'il s'est déjà essayé au problème, mais n'est pas satisfait de sa dérivation.

En 1698, son frère Jacques Bernoulli, se penche sur le particulier du cône et du cylindre, montrant que les lignes de plus courte distance forment des lignes droites lorsque l'on déroule les surfaces sur un plan (ceci est en effet possible uniquement car ces deux surfaces ont une courbure nulle, comme il sera

34. Une conoïde désigne ici une surface de révolution (i.e. invariante par rotation autour d'un axe) ouverte et une sphéroïde désigne une surface de révolution fermée.

compris ultérieurement). Cependant, Jean Bernoulli et Leibniz ne se déclareront pas convaincus par cette dérivation. Jacques publiera également des résultats sans preuves sur les surfaces de révolution paraboliques et en profitera pour reprocher à son frère l'utilisation du mot "géométriquement" dans sa formulation du problème, car il est ambigu (Stäckel 1893). En réponse, Jean déclarera "si l'on considère la quantité et la diversité infinies des surfaces courbes, qui ne sont ni des conoïdes ni des sphéroïdes, on voit que mon frère n'a pas fait grand-chose en résolvant le problème des surfaces de révolution" auquel il ajoutera "c'est pourquoi je crois avoir fait quelque chose de grand en trouvant une méthode générale pour arriver à l'équation pour toute surface donnée, qu'elle soit conoïde ou non. Mais je laisse à mon frère le soin de la trouver, afin qu'il ait le temps de trouver sa solution et de répondre pleinement au problème"³⁵, ce qui ne manquera certainement pas de déplaire à son frère. Jacques est cependant déjà malade et mourra en 1705, n'ayant pu répondre à cette invitation. On peut supposer qu'il a cherché en vain l'équation des géodésiques, comme le laisse penser certaines de ces dernières notes (Stäckel 1893).

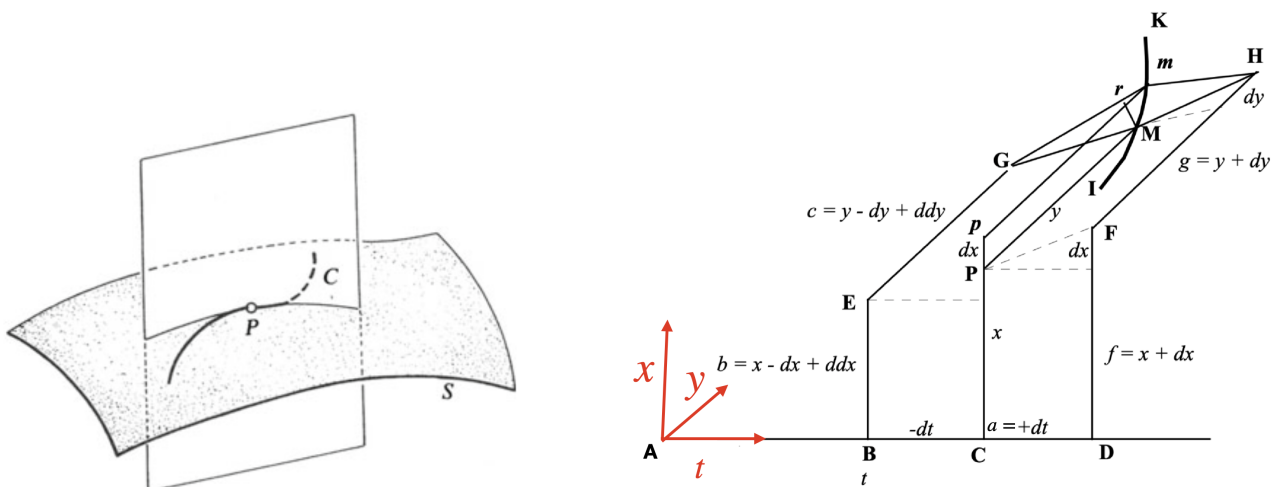


FIGURE 8 – Gauche : représentation de la propriétés des géodésiques découverte par Jean Bernoulli (pris dans Freguglia (2016) p.104). Droite : Adaptation de la figure de L. Euler (1732) (p.125), pour y faire apparaître toutes les quantités du problème. Adapté de <https://www.17centurymaths.com/contents/euler/e009tr.pdf>

Dans une lettre à Leibniz³⁶, Jean déclarera en effet avoir obtenu une équation différentielle définissant la courbe de moindre distance entre deux points comme la courbe passant par ces deux points dont le plan osculateur³⁷ est en tout point normal (i.e. perpendiculaire) au plan tangent³⁸ de la surface (voir partie gauche de la figure 8). Il s'agit bien là d'une propriété clef des courbes géodésiques. L'auteur fera également référence à l'obtention d'une équation différentielle générale dans ses correspondances avec le marquis de l'Hôpital.

Malheureusement aucun détail supplémentaire n'a pu être trouvé dans les notes de Bernoulli (Eneström 1899). Stäckel (1893) (p.448) émet l'hypothèse que celui-ci aurait utilisé une méthode similaire à celle utilisée pour obtenir l'équation de la chaînette quelques années plus tôt³⁹, mais ni l'équation ni sa preuve n'ont pu être retrouvés. Cependant, comme Johann et Leibniz l'avaient visiblement déjà très certainement deviné d'après leurs échanges, le problème des géodésiques ne pouvait être résolu qu'en utilisant une équation $S(x, y, z) = 0$ pour définir la surface en terme des

35. Traduction personnelle d'une citation empruntée à Stäckel (1893) p.448 (voir source primaire en référence).
 36. Leibniz et J.I. Bernoulli (1745) p. 393, voir également la reproduction p.227 de Carathéodory (1937).
 37. Plan définit comme comprenant les points $\gamma(\tau)$, $\gamma(\tau + d\tau)$ et $\gamma(\tau - d\tau)$ i.e. plan épousant le mieux la courbe au point P (il contient le vecteur tangent et le rayon de courbure).
 38. Plan en $\gamma(\tau)$ approximant le mieux la surface localement (il contient le vecteur tangent à la courbe).
 39. La chaînette étant la courbe correspondant à la forme que prendrait une chaîne suspendue à la même hauteur par ces deux extrémités et soumise uniquement à son propre poids.

trois coordonnées spatiales (x, y, z) , faisant de la recherche de la ligne géodésique le premier problème de géométrie dans l'espace ayant été traité avec ce type de raisonnement très moderne (Stäckel 1893). Il faudra alors attendre 30 ans pour que le problème refasse surface, lorsque Jean convaincra le jeune Euler de s'intéresser au problème.

5.2 La solution d'Euler

Dans sa jeune vingtaine, Euler s'attaque alors au problème de la ligne la plus courte à la demande de son mentor Jean Bernoulli, qui lui sera très certainement transmise par l'intermédiaire de son fils Daniel Bernoulli (1700-1782) à Saint-Pétersbourg (Eneström (1899), p.21). Euler publiera ses résultats dans L. Euler (1732)⁴⁰, qui sera le premier essai du jeune scientifique sur le calcul des variations. Il commence son papier en faisant référence à l'invitation de Jean Bernoulli à résoudre ce problème, ce dernier ayant déjà trouvé la solution. Il rappelle également que la ligne dont il s'apprête à trouver l'équation peut simplement être construite mécaniquement à l'aide d'une corde que l'on applique entre deux points d'une surface, mais qu'il ne peut pas se contenter d'une telle construction, car il en cherche l'expression algébrique. Un autre point qui sera majeur pour la suite du développement de la géométrie différentielle moderne est de plus évoqué : les géodésiques caractérisent les surfaces.

Il procède ensuite comme suit : soit une ligne minimisant la distance entre les points G et H sur une surface \mathcal{S} . Nous choisissons un repère tri-dimensionnel (A, x, y, z) . Soit M un point sur la courbe associé aux coordonnées $(x = CP, y = PM, t = AC)$ (voir partie droite de la figure 8). Soit m un point infiniment proche de M de coordonnées $x + dx = Cp, y + dy = pm, t = AC)$, distant du premier ordre. Comme nous l'avons vu dans le cas de la solution de Jacques de la brachistochrone, alors la courbe extrémise la distance si $GM + MH = Gm + mH$ admet un minimum en M lorsque m varie sur la courbe IMK où IMK est l'intersection de la surface avec le plan (x, y) en C (i.e. une portion de courbe sur la surface passant par M et associée à un t constant). Finalement, pour des variations de la distance de m d'ordre deux par rapport à M on aura exactement $GM + MH = Gm + mH$ (condition que Jacques avait donc écrite identiquement sur les temps de parcours pour la brachistochrone). En somme : demander aux variations d'ordre deux de s'annuler permet de trouver le point $M \in GH$ minimisant la distance $GM + MH$. On pose alors $BC = CD = a, BE = b, EG = c, DF = f$ et $FH = g$, on obtient grâce au théorème de Pythagore $GM + MH = \sqrt{a^2 + (x - b)^2 + (y - c)^2} + \sqrt{a^2 + (f - x)^2 + (g - y)^2}$. En prenant la différentielle de cette équation et en exigeant qu'elle s'annule, on obtient facilement la condition

$$\frac{(x - b)dx + (y - c)dy}{\sqrt{a^2 + (x - b)^2 + (y - c)^2}} = \frac{(f - x)dx + (g - y)dy}{\sqrt{a^2 + (f - x)^2 + (g - y)^2}}. \quad (22)$$

Maintenant, si la surface est caractérisée par une équation fonctionnelle du type $S(t, x, y) = 0$, elle l'est également par l'équation différentielle

$$dS = \frac{\partial S}{\partial t}dt + \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy = 0, \quad (23)$$

que Euler écrit sous la forme $Pdx = Qdy + Rdt$. En considérant comme dans notre problème un mouvement du point m sur la surface à t constant, on a donc $dx/dy = Q/P$, caractérisant le déplacement infinitésimal de M à m sur la surface le long de IJK . En faisant de plus l'identification $a = dt, f = x + dx, g = y + dy$ ainsi que $c = y - dy + dydy$ et $b = x - dx + ddx$ (où ddx et ddy sont des infinitésimaux d'ordre deux plus petits que dx et dy), on peut alors réécrire l'équation (22) comme

$$\frac{Q(dx - ddx) + P(dy - ddy)}{\sqrt{dt^2 + (dx - ddx)^2 + (dy - ddy)^2}} = \frac{Qdx + Pdy}{\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2}}. \quad (24)$$

40. Le mémoire apparu en 1732 est daté de novembre 1728. Cependant Eneström 1899 a démontré que le travail n'a pas pu être complété avant avril 1729. Pour une traduction en anglais voir également <https://www.17centurymaths.com/contents/euler/e009tr.pdf>.

Cette dernière expression nous indique simplement que – pour Q, P et dt fixe – la partie droite de l'équation reste invariante sous une variation du second ordre $x \rightarrow x - ddx$ et $y \rightarrow y - ddy$. Il en suite que sa différentielle doit s'annuler. En calculant cette différentielle⁴¹ et la demandant égale à zéro, on obtient alors

$$\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}. \quad (25)$$

Cette dernière équation permet d'écrire les deux équations différentielle caractérisant une courbe minimisant la distance comme

$$\begin{cases} \frac{Qddx+Pddy}{Qdx+Pdy} = \frac{dxddx+dyddy}{dt^2+dx^2+dy^2}, \\ Pdx = Qdy + Rdt, \end{cases} \quad (26)$$

où la première assure la minimisation de la distance et la deuxième assure simplement que la courbe reste sur la surface. Euler applique ensuite ces équations en les intégrant dans le cas du cylindre, des conoïdes et des sphéroïdes, comme l'avait demandé originellement Jean Bernoulli.

L'influence des deux frères dans cette dérivation est nettement visible : Jean apparait en premier plan comme mentor du jeune Euler alors que l'influence de Jacques se ressent à travers les méthodes d'analyse utilisées.

Jean publiera sa propre solution 15 ans plus tard dans le quatrième volume d'Opera Omnia Jean Bernoulli, Schmidt et Bousquet (1742). Il utilisera exactement les mêmes termes que dans sa correspondance avec Leibniz 50 ans plus tôt, laissant penser qu'il avait bien en effet trouvé l'équation des géodésiques dès 1697 (Carathéodory 1937).

Alexis Claude Clairaut (1713-1765), âgé de seulement 20 ans et encore plus jeune que Euler, trouvera également indépendamment cette solution dans Clairaut (1733), mais nous ne détaillerons malheureusement pas ici sa dérivation afin de garder un semblant de concision.

6 Conclusions et entrevue d'un futur radieux

Quarante-trois ans après son frère, Jean meurt en 1748. La suite de l'histoire des géodésiques n'appartiendra plus aux frères Bernoulli. Euler présente une récollection de toutes les dérivations précédemment données dans "L'art de trouver les courbes qui satisfont des propriétés de maxima et de minima", dans laquelle il retraitera le cas des géodésiques avec une approche identique à celle de 1732 (Leonhard Euler et al. 1744). Il s'attaquera de nouveau à ce sujet dans Mécanique (L. Euler 1736), en étudiant le mouvement d'un point matériel contraint à rester sur une surface courbe et démontrera que la trajectoire suivie par le corps minimise la distance sur la surface si il ne subit aucune accélération. Il redémontre également dans ce cas la relation entre plan tangent et plan osculateur trouvée par Jean Bernoulli et retrouvera une équation différentielle qui sera prouvée équivalente à celle obtenue en 1732. Propriété à nouveau redémontrée en plus grande généralité par Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) en 1806 (Lagrange 1806). L'impact absolument majeur qu'aura Euler sur le développement subséquent du calcul différentiel est difficilement quantifiable. Il reprendra notamment la nouvelle formulation du calcul δ proposée par Lagrange⁴², et sera le premier à utiliser le terme "calcul des variations" en 1756 en s'occupant à déterminer toutes les conséquences formelles de ce nouveau formalisme, tant pour les mathématiques que pour la mécanique (Carathéodory 1937).

En guise de conclusion, je ne peux résister à l'envie de tracer à gros traits la suite de l'étude des courbes géodésiques, afin de mieux apprécier la portée gigantesque qu'auront ces développements pour la co-évolution des mathématiques et des sciences physiques : Le nom de géodésique n'apparait que tardivement avec Pierre Simon Laplace (1749-1827) en 1799 (Laplace (1799), p.129-131) et ces courbes occuperont une place absolument centrale au XIX^{ème} siècle dans le développement de la géométrie différentielle avec notamment la définition moderne de la notion de courbure (géodésique) d'une surface et la première étude de la géométrie intrinsèque des surfaces, indépendamment de

41. On rappelle que pour deux fonctions u et v , $d(u/v) = (vdu - udv)/v^2$ et $d(\sqrt{u}) = du/(2\sqrt{u})$.

42. Voir Lagrange (1806) et Woodhouse (1810).

l'espace dans lequel elles sont représentées, par Gauss (1828) (voir également l'analyse de Nabonand (1995)). Ces résultats représentent un tournant majeur et la courbure d'une surface (ou d'un espace) se définit encore aujourd'hui de manière moderne à partir de la déviation de ses courbes géodésiques. L'étude des courbes minimisantes amène ainsi progressivement à penser l'étude de géométrie alternatives à la géométrie plane (Géométrie non-Euclidienne) sur des espaces possiblement courbes. Ainsi Nikolai Lobachevsky (1792-1856), János Bolyai (1802-1860) et Bernhard Riemann (1826-1866) développent les premiers outils permettant de traiter les espaces aux géométries particulières⁴³. La notion de surface se voit ainsi progressivement étendue et généralisée en n'importe quelle dimension grâce la notion de variété différentielle. La notion de distance étant encodée par un tenseur métrique sur les variétés dites Riemanniennes. En parallèle, dans la continuité de Euler et de Lagrange, les études mécaniques proposées par William Rowan Hamilton (1805-1865), Joseph Liouville (1809-1882), Gaston Darboux (1842-1917) pour ne citer qu'eux, donnent naissance à la mécanique analytique moderne dans laquelle les géodésiques et courbes minimisantes sur des variétés jouent un rôle primordial puisqu'elles caractérisent les trajectoires des systèmes physiques. Les développements les plus modernes sont ensuite entrepris notamment par Jacques Hadamard (1865-1963) et Henri Poincaré (1854-1912). Ces outils seront ensuite au centre de la relativité générale développée par Albert Einstein (1879-1955) et Marcel Grossmann (1878-1936) dans laquelle l'espace-temps est une variété différentielle et les trajectoires des corps soumis à la gravité sont des géodésiques sur celle-ci. Dans sa forme la plus moderne, la définition d'une géodésique requiert celle – extrêmement riche – de connexion, qui permet la différentiation sur les variétés. Elle sera développée notamment par Elwin Bruno Christoffel (1829-1900) et Tullio Levi-Civita (1873-1941), puis par Elie Cartan (1869-1951), Charles Ehresmann (1905-1979) et Jean-Louis Koszul (1921-2018) (voir Freeman (2011) et références associées). Une géodésique est alors une courbe⁴⁴ obéissant au transport parallèle $\nabla_u u = 0$ vis à vis de la connexion de Levi-Civita⁴⁵ ∇ , où $u = \gamma'$ est le vecteur tangent à la courbe. Cette définition ouvre la porte à l'étude de connexions alternatives autres que celle de Levi-Civita sur tout type de variété, qui permettront notamment de décrire l'évolution des systèmes quantiques (connexion de Berry (1984)) ainsi que toutes les interactions fondamentales connues à ce jour (connexions de Yang-Mills (Yang et Mills 1954)).

Bien que grandement partiel, le précédent résumé nous permet de conclure que les études des courbes minimisantes à la fin du XVII^{ème} et au début du XVIII^{ème}, de la brachistochrone aux géodésiques⁴⁶ ont précédées et pavées la voie à des développements majeur en mathématiques et en sciences physiques. A la fin du XVII^{ème} siècle, le problème de la courbe brachistochrone démontre toute la puissance du calcul différentiel proposé par Leibniz et Newton et aide à son développement. Consécutivement, la recherche des courbes minimisantes devient un problème de première importance pour les mathématiciens et les physiciens au début du XVIII^{ème} siècle, sur fond de joutes mathématiques, en partie nourries par la rivalité des deux frères Bernoulli. La question plus épineuse de trouver les courbes géodésiques sur des surfaces générales se pose alors naturellement. Elle ouvrira pleinement la porte au développement de la géométrie différentielle au XIX^{ème} siècle où géométrie et calcul différentiel se retrouveront formellement unifiés.

Références

Académie des inscriptions et belles-lettres (1697). *Le Journal des sçavans*. Sous la dir. de J. Cusson (Paris). Bibliothèque nationale de France. URL : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k56544f/f387.image.pagination>.

43. Pour l'ensemble de ce paragraphe, voir Struik (1933) et les références associées

44. Soit M une variété différentielle. Une courbe est une application $\mathbb{R} \rightarrow M$, $\tau \rightarrow \gamma(\tau)$. Notons que cette définition se distingue de celle d'une fonction qui elle est une application $M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \rightarrow f(x)$.

45. Unique connexion préservant la métrique et sans torsion. Elle peut s'exprimer uniquement en termes de dérivées premières de la métrique. Voir e.g. Faure (2021).

46. Il est curieux de noter que la courbe brachistochrone peut formellement être pensée comme un cas particulier de géodésique (voir e.g. la discussion [ici](#)).

- Arnold Weinstein, Vogtmann (1989). *Mathematical Methods Of Classical Mechanics*. 2nd. Graduate Texts in Mathematics. Springer. ISBN : 9780387968902 ; 0387968903 ; 3540968903 ; 9783540968900.
- Bernoulli, Jacques (1697). *Solutio Problematum Fraternalium, peculiari Programme Cal. Jan. 1697 Groningae, nec non Actorum Lips. mense Jun & Dec. 1696, & Febr. 1697 propositorum : una cum Propositione reciproca aliorum*. prostant apud Joh. Grossium ... & J. F. Gleditschium. URL : <https://books.google.it/books?id=wYLDtJa4gfsC>.
- Bernoulli, Jean (1696). « Problema novum ad cujus solutionem invitantur ». In : *Acta eruditorum : anno 1696 publicata*. prostant apud Joh. Grossium ... & J. F. Gleditschium. URL : <https://books.google.it/books?id=AK1iB3AGxAEC>.
- (1697). *Curvatura radii in diaphanis non uniformibus, Solutioque Problematis a se in Actis 1696, p. 269, propositi, de invenienda Linea Brachystochrona, id est, in qua a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit, et de curva Synchrona seu radiorum unda construenda*. prostant apud Joh. Grossium ... & J. F. Gleditschium. URL : <https://books.google.it/books?id=wYLDtJa4gfsC>.
- (1718). « Remarques Sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des Problèmes sur les Isoperimetres, avec une nouvelle methode courte & facile de les resoudre sans calcul, laquelle s'étend aussi à d'autres problèmes qui ont rapport a ceux-là ». In : *Acta eruditorum : anno 1718 publicata*. prostant apud Joh. Grossium ... & J. F. Gleditschium. URL : <https://books.google.it/books?id=wYLDtJa4gfsC>.
- Bernoulli, Jean, G.F. Schmidt et M.M. Bousquet (1742). *Johannis Bernoulli ... Opera omnia, : 1690-1713*. Johannis Bernoulli ... Opera omnia, : tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita. Sumptibus Marci-Michaelis Bousquet & sociorum. URL : <https://books.google.fr/books?id=PDYAAAAAQAAJ>.
- Berry, M. V. (mars 1984). « Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes ». In : *Proceedings of the Royal Society of London Series A* 392.1802, p. 45-57. DOI : [10.1098/rspa.1984.0023](https://doi.org/10.1098/rspa.1984.0023).
- Blasjo, Viktor (2017). *Transcendental Curves in the Leibnizian Calculus*. 1^{re} éd. Academic Press. ISBN : 012813237X ; 9780128132371.
- Boyer, C. B. (1959). *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. Dover Publications. ISBN : 0486605094 ; 9780486605098.
- Bruce, I. (déc. 1997). « Some properties of cycloid trajectories ». In : *American Journal of Physics* 65.12, p. 1164-1167. DOI : [10.1119/1.18755](https://doi.org/10.1119/1.18755).
- Cantor, M. (1898). *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Bibliotheca mathematica Teubneriana vol. 3. Teubner. URL : <https://books.google.it/books?id=aNMSAQAAQAAJ>.
- Carathéodory, C. (1937). « The Beginning of Research in the Calculus of Variations ». In : *Osiris* 3, p. 224-240. ISSN : 03697827, 19338287. URL : <http://www.jstor.org/stable/301588> (visité le 13/11/2023).
- Clairaut, A.C. (1733). « Sur quelques questions de maximis et minimis. » In : *Histoire de l'Academie des Science p. 186-194*.
- Dubois, J. (1991). *Chute d'une bille le long d'une gouttière cycloïdale, Tautochrone et brachistochrone, Propriétés et historique*. Bulletin de l'union des physiciens. URL : <http://materiel-physique.ens-lyon.fr/Logiciels/CD%20N%C2%B0%203%20BUP%20DC%20V%204.0/Disk%201/TEXTES/1991/07371251.PDF>.
- Eneström, G. (1899). « Sur la découverte de l'équation générale des lignes géodésiques ». In : *Bibliotheca Mathematica*.
- Euler, L. (1732). « De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente ». Latin. In : *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Volume 3, pp. 110-124*. URL : <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/9/> (visité le 13/11/2023).
- (1736). « Mechanica, volume 2 ». Latin. In : *St. Petersburg : Imperial Academy of Sciences, Volume 2, pp. 1-500*. URL : <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/16/> (visité le 13/11/2023).
- Euler, Leonhard et al. (1744). *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive, Solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. en. Genevæ : Apud

- Marcum-Michaellem Bousquet & Socios. DOI : [10.5479/sil.318525.39088000877480](https://doi.org/10.5479/sil.318525.39088000877480). URL : <https://library.si.edu/digital-library/book/methodusinvenie00eule> (visité le 13/11/2023).
- Faure, F. (2021). *Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique*. URL : <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/>.
- Feynman, R. P. (1988). *QED, the strange theory of light and matter*. Princeton University Press. ISBN : 9780691024172 ; 0691024170 ; 0691083886 ; 9780691083889.
- Frankel T. ; Mayer, M. E. (déc. 1998). « The Geometry of Physics : An Introduction ». In : *Physics Today vol. 51 iss. 12* 51 (12). DOI : [10.1063/1.882494](https://doi.org/10.1063/1.882494). URL : libgen.li/file.php?md5=3b77844983c8ad813d58115793eb3990.
- Freeman, Kamielle (2011). « A historical overview of connections in geometry ». In : URL : <https://soar.wichita.edu/handle/10057/3953>.
- Freguglia P. ; Giaquinta, M. (2016). « The Early Period of the Calculus of Variations ». In : DOI : [10.1007/978-3-319-38945-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-38945-5).
- Galilei, Galileo (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. Attinenti alla meccanica e i movimenti locali*. First. Elzeviro.
- Gauss, C.F. (1828). *Preliminary Catalogue of Fixed Stars : Intended for a Prospectus of a Catalogue of the Stars of the Southern Hemisphere Included Within the Tropic of Capricorn : Now Reducing from the Observations Made in the Observatory at Paramatta*. Analytische Untersuchung d. dreieckigen Pyramide. Imp. de L. Bouchard-Huzard. URL : <https://books.google.it/books?id=bXOAAAAAMAAJ>.
- Goldstine, H. H. (1991). *Die Streitschriften von Jacob und Jean Bernoulli : Variationsrechnung*. Birkhäuser Basel. ISBN : 9783034877343 ; 303487734X ; 9783034877336 ; 3034877331.
- Huygens, C. (1673). *Horologium Oscillatorium*. URL : <https://books.google.fr/books?id=nR1WAAAAcAAJ>.
- Johnston, D. C. (sept. 2018). « Cycloidal Paths in Physics ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :1809.03871, arXiv :1809.03871. DOI : [10.48550/arXiv.1809.03871](https://doi.org/10.48550/arXiv.1809.03871). arXiv : [1809.03871 \[physics.pop-ph\]](https://arxiv.org/abs/1809.03871).
- Khelif, Hamza (2010). *Le jardin des courbes*. ellipses.
- Knobloch, E. (jan. 2012). « Leibniz and the brachistochrone ». In : *Optimization Stories, Documenta Mathematica*, p. 15-18.
- Lagrange, J.L. (1806). *Leçons sur le calcul des fonctions*. Courcier. URL : <https://books.google.it/books?id=aos3AAAAMAAJ>.
- Laplace, P. S. de (1799). *Traité de mécanique céleste*. URL : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8615811x.image#>.
- Leibniz, G.W. (1684). « Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irracionales quantitates moratur ». In : *Acta eruditorum*.
- Leibniz, G.W. et J.I. Bernoulli (1745). *Virorum Celeberr. Got. Gul. Leibnitii et Johannes Bernoulli Commercium Philosophicum et Mathematicum*. Sumpt. M.-M. Bousquet. URL : https://books.google.it/books?id=JUn_GgAACAAJ.
- Montucla, J.É., J.J.L.F. de Lalande et L. Lande (1799). *Histoire des mathématiques : dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours*. Histoire des mathématiques. chez Henri Agasse. URL : <https://books.google.it/books?id=2xtMrbjLhnYC>.
- Nabonnand, Philippe (1995). « Contribution à l'histoire de la théorie des géodésiques au XIXe siècle ». fr. In : *Revue d'histoire des mathématiques* 1.2, p. 159-200. URL : http://www.numdam.org/item/RHM_1995__1_2_159_0/.
- Newton, Isaac (1669). « De analysi per aequationes numero terminorum infinitas ». In : URL : https://books.google.it/books/about/De_analisi_per_aequationes_numero_terminorum.html?id=P04UzQEACAAJ&redir_esc=y.
- Peiffer, Jeanne (1989). « Le problème de la brachistochrone à travers les relations de Jean I Bernoulli avec L'Hôpital et Varignon ». In : *Studia Leibnitiana Sonderheft 17 : Der Ausbau des Calculus durch Leibniz und die Brüder Bernoulli (Symposium der Leibniz-Gesellschaft und der Bernoulli-Edition der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, 15. bis 17. Juni 1987)*,

- Peiffer, Jeanne (2006). « Jacob Bernoulli, teacher and rival of his brother Johann. » eng. In : *Journal Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique [electronic only]* 2.1b, Article 1, 22 p., electronic only-Article 1, 22 p., electronic only. URL : <http://eudml.org/doc/127023>.
- Rashed, R. (avr. 2019). « Fermat et le principe du moindre temps ». In : *Comptes Rendus Mécanique* 347.4, p. 357-364. DOI : [10.1016/j.crme.2019.03.010](https://doi.org/10.1016/j.crme.2019.03.010).
- Roberval, Gilles Personne de (1693). *Divers Ouvrages de M. de Roberval*.
- Smith, David Eugene (1929). *Source Book in Mathematics : v. 2*. Dover Publications Inc. ISBN : 0486605531 ; 9780486605531.
- Stäckel, P. (1893). « Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien ». In : *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig : Mathematisch-Physische Classe*. Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig : Mathematisch-Physische Classe vol. 45. Weidmannsche Buchhandlung. URL : <https://books.google.it/books?id=ktUAAAAAYAAJ>.
- Struik, D. J. (1933). « Outline of a History of Differential Geometry : I ». In : *Isis* 19.1, p. 92-120. ISSN : 00211753, 15456994. URL : <http://www.jstor.org/stable/225188> (visité le 04/11/2023).
- Whitman, E. A. (1943). « Some Historical Notes on the Cycloid ». In : *The American Mathematical Monthly* 50.5, p. 309-315. ISSN : 00029890, 19300972. URL : <http://www.jstor.org/stable/2302830> (visité le 30/10/2023).
- Woodhouse, R. (1810). *A Treatise on Isoperimetrical Problems and the Calculus of Variations*. J. Smith, printer to the University, et sold by Deighton. URL : <https://books.google.it/books?id=5kwDAAAAQAAJ>.
- Yang, C. N. et R. L. Mills (oct. 1954). « Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance ». In : *Phys. Rev.* 96 (1), p. 191-195. DOI : [10.1103/PhysRev.96.191](https://doi.org/10.1103/PhysRev.96.191). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.96.191>.
- Yoder, J.G. (1988). *Unrolling Time : Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature*. Cambridge University Press. ISBN : 9780521341400. URL : <https://books.google.fr/books?id=21XllogeKCZ8C>.

A Petits rappels de trigonométrie

Nous listons ici quelques identités trigonométriques élémentaires utilisées afin de démontrer les formules données dans le corps du texte

$$\begin{aligned}
 \tan(x) &= \sin(x)/\cos(x) \\
 \cos^2(x) + \sin^2(x) &= 1 \\
 \cos(2x) &= 1 - 2\sin^2(x) \\
 \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\
 \cos(x)' &= -\sin(x) \\
 \sin(x)' &= \cos(x)
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

où les quantités primées sont dérivées par rapport à x .

B Preuve de l'équation différentielle de la cycloïde

Partant de la paramétrisation de la cycloïde (équation (3)), on dérive facilement

$$\begin{cases} dx &= R(1 - \cos(\tau))d\tau, \\ dy &= R\sin(\tau)d\tau. \end{cases}$$

Notons que même si ce calcul se fait souvent par automatisme à partir de formules de dérivées connues par cœur, il serait possible de les redémontrer (fastidieusement) à partir de la définition donnée par l'équation (2). On a alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(\tau)}{1 - \cos(\tau)} = \frac{\sin(\tau)}{1 - \cos(\tau)} = \frac{2 \sin(\tau/2) \cos(\tau/2)}{2 \sin^2(\tau/2)} = \tan^{-1}(\tau/2) \quad (28)$$

D'autre part $y = R(1 - \cos(\tau)) = 2R \sin^2(\tau/2)$, d'où

$$\sqrt{\frac{2R - y}{y}} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2(\tau/2)}{\sin^2(\tau/2)}} = \sqrt{\frac{\cos^2(\tau)}{\sin^2(\tau)}} = \tan^{-1}(\tau/2) \quad (29)$$

Prouvant ainsi l'égalité des deux termes et l'équation différentielle (6).