

Démonstrations et schémas

Note de lecture, UE 904 EC 4

Léo Vacher*

2023

1 Introduction et contexte

Idéalement, la démonstration d'une proposition mathématique requiert la dérivation d'une *preuve formelle*. Une preuve formelle de la proposition mathématique p au sein d'un système d'axiomes \mathcal{A} est constituée d'une suite finie de propositions élémentaires $q_1, q_2 \dots q_M$ telle que la proposition finale soit p ($q_M = p$). Les propositions intermédiaires q_i doivent être ou des axiomes $q_i \in \mathcal{A}$ ou des tautologies (q_i toujours vrai) ou bien doivent pouvoir être retrouvées à partir de propositions antérieures à l'aide l'inférence logique i.e. $\exists 1 \leq m, n < i$ tels que $q_m \wedge q_n \rightarrow q_i$ soit vrai (pour une définition et des exemples voir e.g. §1.3 de Schuller (2016)). Ce format de démonstration répond à l'idéal de rigueur et de neutralité imposé par la logique¹. De par son caractère mécanique et algorithmique, la validité d'une démonstration déjà établie peut être évaluée à l'aide de programmes informatiques tels que COQ² ou LEAN³. En pratique, cependant les preuves sont rarement formulées ainsi, car l'exercice est extrêmement fastidieux et ne correspond pas à la réalité dynamique et non mécanique de la recherche en mathématiques.

Lors de l'établissement d'une preuve, plus particulièrement dans les domaines de la géométrie ou de la théorie des nœuds et des graphes, l'utilisation de dessins et de diagrammes se révèle être un outil puissant et parfois indispensable. En plus d'amener à la preuve d'une proposition, les diagrammes ont une vertu pédagogique puissante. Avec eux, il n'est pas seulement possible d'attester de la vérité d'une proposition, mais également d'obtenir une visualisation de celle-ci, permettant de développer une intuition forte de son contenu. Une preuve fondée sur un schéma apparaît ainsi comme élégante, simple et enrichissante pour la compréhension.

Cependant, un diagramme n'est pas une proposition logique et ne peut donc pas être considéré dans la séquence q_1, \dots, q_M d'une preuve formelle. De plus, il ne fait également aucun doute que les représentations visuelles peuvent être trompeuses et en un sens avoir l'effet d'un "tour de magie" pouvant donner une illusion de vérité⁴. On pourra donc ar-

*vacher.leo.etu@gmail.com

1. J'ai brièvement discuté [ici](#) de la question de la neutralité et du lien entre logique et mathématiques au regard des positions de Poincaré et Brouwer.

2. <https://coq.inria.fr/>

3. <https://leanprover.github.io/>

4. A ce sujet, voir la vidéo de vulgarisation "How to lie using visual proofs" de "3Blue1Brown". A l'aide de représentations visuelles, l'auteur fournit des preuves fausses mais convaincantes des propositions suivantes : "La surface d'une sphère vaut πR^2 ", " $\pi = 4$ " et "tous les triangles sont isocèles".

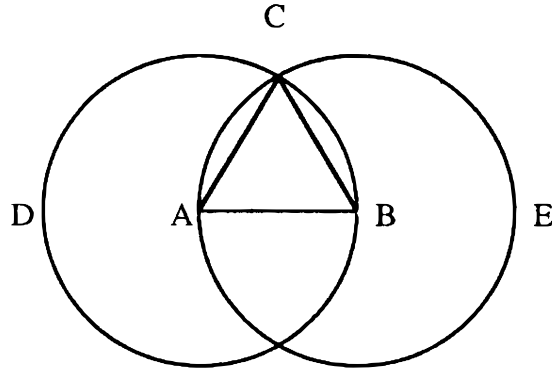


FIGURE 1 – Illustration de la proposition I.1. des *Éléments de géométrie* (Euclide d’Alexandrie -300 av J.C.).

gumenter que, malgré leurs vertus pédagogiques, de telles représentations doivent être systématiquement rejetées lors ce que l’on cherche à établir une preuve. Cette position ne semble pas pour autant souhaitable, tant l’usage des représentations est central en mathématiques et indispensable pour certaines disciplines comme la géométrie ou la théorie des nœuds et des graphes, qui s’intéressent par essence à des objets représentables. Une telle vision serait également en conflit avec l’histoire des mathématiques, les preuves formelles étant un développement relativement récent (voir e.g. Nagel (1939)) et l’ensemble des développements antérieurs au XIX^{me} siècle étant largement fondé sur l’usage des diagrammes⁵.

Un cas d’école est donné par la proposition I.1. des *Éléments de géométrie* d’Euclide (Euclide d’Alexandrie -300 av J.C.). Comme illustré en figure 1, pour démontrer la proposition ”il est possible de construire un triangle équilatéral à partir d’un segment”, l’auteur réalise un schéma dans lequel il trace deux cercles centrés en chacune des extrémités A et B d’un segment de droite AB et ayant pour rayon la longueur du segment \overline{AB} . Lors de la démonstration, il est fait appel au schéma pour constater que les deux cercles se croisent en un point C . La proposition de l’existence de C n’est ni une tautologie, ni un axiome de la géométrie plane et ne peut être déduit des propositions précédentes. Doit on alors pour autant rejeter cette preuve? L’utilisation de diagrammes est souvent considérée comme une faiblesse dans l’édifice axiomatique de la géométrie plane d’Euclide. Dans le cas particulier de la proposition I.1., l’établissement d’une preuve formelle, indéniablement plus longue et sans aucun doute plus abstraite et difficile d’accès, est possible et disponible en appendice A.1 de Beeson, Narboux et Wiedijk (2017). Cette dernière méthode, exempt de schéma, est elle ainsi préférable voire uniquement acceptable?

Généralisant cet exemple, on se demande alors si les schémas et diagrammes peuvent être légitimement considérés comme des éléments recevables de preuve mathématique. Nous discuterons ici l’article de J. R. Brown (1997) dans lequel l’auteur cherche à répondre à cette question par l’affirmative à travers des exemples particulièrement frappants.

5. A titre d’exemple, l’usage des théorèmes des valeurs intermédiaires – illustration principale du papier que nous allons étudier en section 2.1 – peut être retracé au 5^{me} siècle avant Jésus-Christ par Bryson d’Héraclée au sujet de la quadrature du cercle (Bos (2001)), alors que sa première preuve formelle fut établie en 1817 (Bolzano (1817)).

2 Résumé de l'article

Dans les sections suivantes, nous résumerons les arguments avancés par Brown (1997), en suivant le plan de l'article. Nous discuterons ensuite plus avant les problématiques soulevées par celui-ci en section 3. Pour faciliter la compréhension sans encombrer le texte, des définitions complémentaires sont données en appendice A. Enfin, j'ai retranscrit et adapté les nombreuses illustrations de preuves présentes dans l'article en appendice B et C.

2.1 Les théorèmes des valeurs intermédiaires

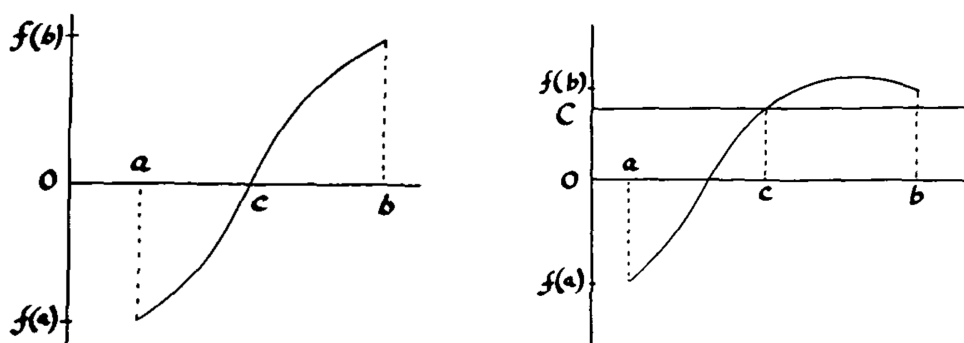


FIGURE 2 – Illustration graphiques des théorèmes des valeurs intermédiaires Gauche : Théorème 1. Droite : Théorème 2. Dans Brown (1997).

Pour amorcer notre discussion, considérons les trois théorèmes des valeurs intermédiaires. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ associant $x \rightarrow f(x)$, les théorèmes s'énoncent comme suit :

Théorème 1 (Théorème du zéro intermédiaire). *Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et change de signe de positif à négatif (ou vice-versa) sur cet intervalle, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.*

Théorème 2 (Théorème de la valeur intermédiaire 1). *Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et il existe $C \in \mathbb{R}$ entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ entre a and b tel que $f(c) = C$.*

Théorème 3 (Théorème de la valeur intermédiaire 2). *Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$. Si $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$, alors il existe un c entre a et b tel que $f(c) = g(c)$.*

Suivant la familiarité du lecteur avec l'analyse, la lecture de ces théorème peut être plus ou moins difficile ou abstraite. Considérons désormais les illustrations données en figure 2. Il est indéniable que ces schémas sont éclairants et rendent immédiate la compréhension du contenu des propositions des théorèmes 1 et 2. De plus, on pourra argumenter que ces schémas fournissent en eux-mêmes des preuves des théorèmes, car leur vue rend immédiate la vérité de ces énoncés. Pour visualiser et prouver le théorème 3, l'auteur fait appel à notre imagination et fournit l'illustration suivante⁶ :

6. Je fournis ici une traduction personnelle de l'auteur en restant aussi près que possible du texte original (p.164).

Illustration du Théorème 3 : "Une randonneuse part du bas d'une montagne à midi et atteint le sommet à 18h. Elle passe la nuit au sommet et redescend le lendemain en suivant le même chemin pour atteindre le bas à midi. Y a-t-il alors une heure dans l'après-midi à laquelle elle se trouve au même endroit sur le chemin les deux jours? Étonnamment, la réponse est oui et ce peu importe la vitesse à laquelle elle monte ou descend. Voilà comment résoudre le problème : considérons une situation équivalente dans laquelle deux randonneurs, un au sommet et un en bas, partent à midi le même jour. Évidemment, ils finiront par se croiser sur le chemin de randonnée. Le temps de leur rencontre correspondra à l'heure commune recherchée."

Identiquement aux schémas de la figure 2, cette illustration – qui pourrait facilement être adaptée en animation visuelle – fournit une visualisation puissante du Théorème 3 et semble bien prouver celui-ci. Les figures et visualisations ont en commun qu'ils font appel à notre intuition et notre perception du problème et des objets mathématiques auquel il fait appel (bien que définir les notions d'intuition et de perception des objets mathématiques soit un sujet d'étude en soi, à ce sujet voir e.g. Parsons (1979) ou Lomas (2002)).

Les preuves formelles des trois théorèmes des valeurs intermédiaires furent dérivées au début du XIX^{me} siècle par Bernard Bolzano (1817). Face à cette preuve, plusieurs positions peuvent être adoptés telles que :

1. La dérivation de cette preuve fournit la première preuve rigoureuse de théorèmes dont la vérité n'était pas établie avant. Les schémas et visualisations présentés précédemment, déjà connus, donnaient alors seulement l'intuition et la compréhension de cette vérité, mais en aucun cas une preuve. Cette interprétation – de loin la plus commune – est généralement présentée par les mathématiciens et les historiens des sciences comme Boyer (1949), Apostol (1967) ou Kline (1972). Il semblerait d'ailleurs que Bolzano (1969/87) lui-même partageait cette opinion. Selon Brown (1997) cependant, cette interprétation ne peut pas tenir, en effet "les diagrammes nous donnent une raison très puissante de croire les théorèmes indépendamment de la preuve formelle. Utilisant uniquement les schémas, nous pouvons être certains de ce résultat – autant que l'on puisse être certain de quoi que ce soit⁷." De plus, il est bon de se rappeler qu'une preuve formelle, telle que définie en introduction, est fondée sur la logique (ici du premier ordre) et sur un système d'axiomes. Or, bien que l'utilisation de la logique soit commune, toutes ses subtilités ne sont pas encore comprises et de même que les images peuvent contenir des éléments trompeurs, il en va de même pour les syllogismes. De plus, il a été montré ultérieurement que les axiomes de la théorie des ensembles utilisés dans la preuve de Bolzano sont profondément inconsistants⁸. Il est alors bon de faire preuve d'humilité et de reculer face aux preuves formelles, au même titre que devant les représentations et diagrammes.
2. En décomposant le théorème, la preuve formelle de Bolzano aurait expliqué le théorème. Cette position est défendue par exemple par Kitcher (1975). Cependant, on a du mal à envisager ce qui aurait pu être expliqué par la preuve qui ne soit pas déjà contenu dans les représentations.

7. Traduction personnelle de Brown (1997) p.164.

8. Une axiomatisation cohérente de la théorie des ensembles ayant été développée ultérieurement au cours du XX^{me} siècle, aboutissant aux "axiomes ZFC" utilisés aujourd'hui. Pour plus sur ce sujet, voir e.g. Bagaria (2023) ou Ferreirós (2007) et les références associées.

3. La preuve formelle permet de confirmer les prémisses sur lesquelles reposent les vérités déjà établies par les représentations. En cela, les diagrammes rapprochent les mathématiques des sciences empiristes telles que la physique. Ils fournissent "l'expérience" sur laquelle construire un cadre théorique valide. Cette position est une version forte de la position 2 (elle la contient et la précise) et c'est celle que l'auteur souhaite défendre.

2.2 L'empirisme mathématique

Si généralisé, le dernier point de vue discuté dans la section précédente (position 3) nous amène au constat suivant : bien que les résultats mathématiques soient basés sur des preuves déductives, la pratique mathématique, elle, est fondée sur une méthode inductive (voir définitions en appendice A). Elle prend pour point de départ des résultats ou des relations particulières, parfois données par des diagrammes. Les preuves sont alors construites en un second temps, de manière à retrouver ou expliquer des résultats apparaissant comme prometteurs. Les axiomes – au fondement des preuves – ne sont pas choisis par ce qu'ils apparaissent comme évidents, mais par ce qu'ils permettent d'établir un nombre minimal d'hypothèses nécessaires permettant de retrouver les conséquences recherchées au sein d'un système logique consistant. Autrement dit : les axiomes sont choisis de manière à retrouver des résultats donnés par des représentations comme celles des diagrammes (comme le seraient les lois en physique visant à expliquer des résultats expérimentaux). De toute évidence – comme en science physique avec e.g. l'avènement de la physique quantique ou de la relativité – une théorie mathématique puissante, rendant justice à de nombreux faits intuitifs (représentable e.g. par des figures), peut permettre d'aboutir à des résultats violant fortement l'intuition. Brown (1997) prend alors l'exemple de l'axiome du choix de la théorie des ensembles, qui est communément accepté malgré ses conséquences contre-intuitives telles que le paradoxe de Tarski-Banach⁹. Une telle position, qualifiable "d'empirisme mathématique", est notamment explorée par Lakatos (1974).

2.3 Le rôle de preuve joué par les diagrammes et représentations

Revenons désormais au rôle joué par les figures et diagrammes dans le processus de la démonstration. Il s'agit de discuter la notion de "perception" des vérités mathématiques. Pour cela, l'auteur présente alors quatre exemples de complexité croissante venant s'ajouter à celui des théorèmes des valeurs intermédiaires. Ces exemples sont issus de la théorie des nombres et de suites. Pour chacun des cas, une figure est donnée ainsi qu'une preuve analytique classiquement acceptée en mathématiques. Ces exemples ne peuvent cependant pas être présentés ici faute de place, mais je les ai détaillés entièrement en Appendice B. On y trouve deux preuves de théorèmes sur les suites finies, et deux cas portant sur les suites infinies. Avec les valeurs intermédiaires issue de l'analyse et des fonctions, il est ainsi démontré que la problématique des diagrammes va bien au-delà de la géométrie. L'auteur nous invite à examiner prudemment ces exemples en se posant

9. Incluant l'axiome du choix, il est en effet possible de démontrer le théorème suivant : soit une boule solide en 3 dimensions dans \mathbb{R}^3 , il est possible de décomposer cette boule en un nombre fini de sous-ensembles disjoints qui peuvent être ensuite réassemblés différemment pour former deux copies identiques de la boule originale. Ce théorème viole ainsi toute notre intuition de la géométrie dans l'espace. À ce sujet, voir e.g. Wagon (2012)

les questions suivantes : le diagramme est-il convainquant ? Est-ce un cas particulier valable seulement à un rang donné ? Si oui, permet-il quand même d'établir une réponse générale ? Les preuves classiques et analytiques associées à ces théorèmes sont elles plus convaincantes ?

Pour pouvoir discuter plus avant ces questions, nous devons explorer la nature des liens entre une image et le problème mathématique qu'elle peut représenter. A travers la notion de "forme picturale", Wittgenstein 1921 suggère l'existence d'une similarité structurelle de l'ordre de la logique entre le problème et sa représentation. Plus précisément, Barwise et Etchemendy 1991 propose qu'un diagramme pertinent doive être isomorphe, ou au moins homomorphe, à la situation qu'il représente (définitions en appendice A). Cela est par exemple le cas des deux derniers exemples de suites infinies présentés en appendice B. Cependant, ce n'est pas le cas des suites finies, qui sont isomorphes uniquement pour une valeur particulière du nombre de termes de la suite n (e.g. sur la figure 3, la partie gauche est isomorphe à $n = 6$ et celle de droite à $n = 7$). Ce n'est pas non plus le cas des schémas de la figure 2, qui ne représentent que des cas particuliers de fonction. Ces figures permettent elles donc d'inférer une réponse générale à partir d'un cas particulier ? Une réponse affirmative peut être donnée, inspiré par la philosophie Kantienne : l'esprit humain voit dans l'image la possibilité d'itération, et peut alors étendre le cas particulier à tous les cas (i.e. n'importe quel valeur de n ou n'importe quelle fonction). L'image d'un cas particulier, vue par un esprit humain, devient alors une représentation valide pour le cas générale. Pour autant, l'auteur nuance cette lecture qui suggère une position métaphysique anti-réaliste des objets mathématiques¹⁰, et préfère, lui, une position Platonicienne (Appendice A), voyant les schémas comme des "fenêtres ouvertes sur le paradis de Platon" (Brown (1997), p.174). Pour autant, les deux visions sont conciliables : à la vue d'une image valable pour un cas particulier n , l'esprit est capable de généraliser pour conclure que celle-ci reste valable $\forall n \in \omega$. Une position Kantienne interprétait ω comme un infini potentiel, idéal mais jamais atteint, et propriété de l'esprit. Cependant, une lecture Platonicienne verrait ω comme un infini actuel, objet mathématique ayant une existence propre. L'existence des infinis actuels étant favorisée par les développements récents en théorie des ensembles (voir e.g. Easwaran et al. (2021)), il n'est pas déraisonnable d'envisager une lecture réaliste/Platonicienne du pouvoir de généralisation à partir d'un cas particulier. De plus, une lecture réaliste permettrait de fournir le lien entre l'image et la réalité mathématique qu'elle décrit, lien plus dur à effectuer depuis une position anti-réaliste¹¹. En effet, une approche Kantienne semble impliquer que nous avons accès à la connaissance d'un résultat mathématique parce que nous voyions la possibilité d'itération dans le diagramme. Le lien entre le diagramme et l'objet mathématique qu'il représente peut alors sembler difficile à effectuer. L'auteur propose au contraire que nous voyons une possibilité d'itération justement parce que nous voyons le résultat mathématique avec "l'œil de l'esprit" permettant à l'esprit humain d'accéder aux réalités mathématiques Platonicienne.

Pour argumenter plus loin dans ce sens, l'auteur propose trois analogies illustrant sa position :

10. Vision partagée par Kant (1781), pour qui les objets mathématiques sont des formes de l'entendement à priori. Bien que ce point soit subtil, il faut comprendre ici pour notre discussion, que les objets mathématiques sont des propriétés de l'esprit et non d'un monde "extérieur" à lui.

11. Il s'agit ici certainement d'une forme déguisée du dilemme de Benacerraf (1984) demandant qu'une ontologie des mathématiques puisse fournir la fois une sémantique et uniforme et une épistémologie plausible ou autrement dit de pouvoir fournir à la fois une explication des objets mathématiques et de notre capacité à les connaître. J'ai brièvement discuté ce point dans [ce document](#).

1. De l'esthétique : en art, une image contient à la fois une dimension picturale (qui représente un objet de manière réaliste) et symbolique (qui véhicule des émotions et des symboles). Par exemple, la peinture "Napoléon" du peintre David, représente effectivement Napoléon sur un cheval (dimension picturale) mais véhicule également les symboles de l'autorité, du courage et de l'aventure (dimension symbolique). L'auteur suggère quelque chose de similaire pour les images en mathématiques : alors que le diagramme représente seulement un cas particulier (dimension picturale), il porte en lui la symbolique du cas général (dimension symbolique).
2. De la géométrie différentielle : en géométrie différentielle, les objets sont indépendants du système de coordonnées choisies pour les décrire. Un vecteur (tangent), par exemple, représente la même "flèche" (objet dit "intrinsèque") quel que soit le choix des axes dans lequel sont exprimés ses composantes (objets dits "extrinsèques")¹². Cependant, en pratique, il faut utiliser des coordonnées pour effectuer certains calculs et représenter des objets abstraits. De même, les diagrammes valables pour des cas particuliers pourraient être pensés comme des réalisations "extrinsèques" d'une réalité abstraite "intrinsèque" plus générale, comme un objet géométrique tri-dimensionnel ne peut être représenté sur un plan que selon un choix d'orientation, l'esprit étant ensuite capable de voir, ou de "reconstruire" celui-ci.
3. De l'inférence en sciences naturelles : les sciences de la nature tirent des conclusions générales à partir d'un nombre fini d'observations. C'est l'inférence déductive, illustrée par le cas d'école suivant : tous les corbeaux que j'observe sont noirs, aucune observation n'a contredit cette expérience, j'en déduis donc que tous les corbeaux sont noirs. De même, quel que soit la fonction que je dessine ou que j'imagine dans le cas de la figure 2, je trouverais que les théorèmes des valeurs intermédiaires sont vrais. J'en déduis alors que ces théorèmes sont toujours vrais. On revient alors à la notion d'empirisme mathématique discutée en section 2.2.

2.4 Discussion et conclusion du papier

Finalement, il est bon de nuancer les positions discutées dans les sections précédentes. Tout d'abord, au sujet de l'induction (analogie 3) : bien que cet argument soit fort, il est indéniable qu'il peut être trompeur. Il arrive en effet que l'on ait affaire à un cas particulier et il faut distinguer les propriétés "essentielles" (e.g. l'eau est formé de la molécule H_2O) des propriétés accidentelles (l'eau étanche la soif). Les objets mathématiques n'ont pas que des propriétés essentielles, et on ne peut pas conclure de "7 est un nombre premier" que "tous les nombres sont premiers".

Plus généralement, on attend souvent deux choses d'une démonstration : une preuve de la vérité du théorème, et si possible la compréhension de celui-ci.

- Vis à vis de la compréhension, les images et diagrammes sont en effet souvent considérés comme de puissantes aides pour rendre un problème intelligible. Il n'est pourtant pas question de sacrifier la rigueur au prix de la compréhension en utilisant des images, et ce n'est pas le point défendu ici. De plus, pour certains problèmes, les preuves analytiques sont parfois plus éclairante que n'importe quels schémas, ou du moins apportent des compréhensions complémentaires. Par exemple, dans

12. A ce sujet, je renvoie encore vers l'excellent cours de Schuller (2016).

le cas des suites, la preuve par récurrence permet de bien comprendre comment la suite se propage d'un rang à l'autre (voir appendice B).

- Au sujet de la preuve, il est bien connu que les représentations visuelles peuvent être trompeuses. C'est ce point qui justifie l'inquiétude et la prudence générale des mathématiciens à leur égard, les relayant au statut d'outils euristiques et pédagogiques et non de preuve. A titre d'exemple, Brown (1997) généralise à toutes dimensions un théorème vrai en dimensions 2 et 3 à l'aide d'images, généralisation qui s'avère être fausse pour des dimensions plus grandes que 10. Faute de place, j'ai détaillé cet exemple en Appendice C. Il met donc bien ici en évidence les dangers qu'il peut y avoir à "faire trop confiance" aux représentations. Nous avons pourtant déjà discuté que les raisonnements logiques, eux aussi, peuvent être trompeurs, et que les images, pour autant, peuvent aussi fournir des éléments de preuves. Il s'agit en fait de savoir bien utiliser chaque outil afin d'en connaître ses limites.

Une position raisonnable serait alors de considérer que les deux approches – analytique et diagrammatique – sont complémentaires et équivalentes, tant au niveau de la preuve que de la compréhension du problème. Il est alors question de rendre légitimes les images au même niveau que les preuves analytiques, mais pas de vouloir qu'une forme puisse supplanter l'autre. En reprenant l'analogie de l'induction, il serait préférable de considérer les figures sur un plan similaires à celui des preuves empiriques acquises par les instruments en sciences de la nature, même si les limites à faire avec ce parallèle ne sont pas clairement définies. Les instruments, tels que les microscopes ou les chambres à bulles peuvent aussi être trompeurs. Une mauvaise compréhension de leurs propriétés optiques et instrumentales peut amener les utilisateurs à interpréter des artefacts instrumentaux comme de vraies observations de phénomènes naturels. Ainsi, apprendre à maîtriser l'instrument et apprendre sur la nature vont main dans la main. La même conclusion peut être tirée sur les outils de preuve (logique et diagrammes) et la réalité mathématiques. On ne peut donc pas rejeter les images comme source de preuve par ce qu'elles peuvent être trompeuses, on doit apprendre à les utiliser, comme les microscopes dans un processus interminable d'essai erreur.

3 Discussion et conclusion générale

Le présent papier pointe vers de nombreuses portes que nous ne pourrions malheureusement pas toutes ouvrir. Comme indiqué en introduction, je souhaiterais ici me concentrer sur le rôle des figures et diagrammes en tant que vecteurs de vérité dans l'établissement d'une preuve en mathématiques. De nombreuses questions connexes méritent pour autant d'être traitées, que je vais simplement évoquer ici, en renvoyant vers la littérature correspondante. Une première enquête légitime serait de rechercher une définition formelle et pratique des diagrammes en mathématiques afin de pouvoir préciser la discussion. Pour cela, je renvoie à la lecture de S. D. Toffoli (2022). De plus, p.169, l'auteur dit vouloir se concentrer sur la perception et la visualisation des vérités mathématiques, cependant cette notion reste surprenamment peu discutée et précisée dans la suite de l'article, au-delà de l'appel à un "œil de l'esprit" permettant l'accès aux vérités mathématiques au sens Platonicien du terme. Pour approfondir la question de la perception des entités mathématiques, nous renvoyons alors à Lomas (2002). En lien très fort avec la notion de perception, Brown propose une visualisation "mentale" comme preuve du théorème 3, qu'il met au même plan que les diagrammes présentés dans l'article, sans plus de justification. Pour

une discussion sur la place des expériences de pensées – chères aux physiciens – en mathématiques, je renvoie à la discussion de Buzzoni (2022). Sans clairement l’expliciter, la discussion de l’auteur va donc en effet au-delà de la question des ”figures” au sens naïf du tracé géométrique au crayon sur une feuille de papier. Il est en fait question de renforcer une approche multi-modale du raisonnement en mathématiques, encourageant l’utilisation de plusieurs formes de raisonnements complémentaires au-delà de la preuve formelle purement logique. Cela englobe bien sûr les diagrammes, les représentations visuelles et les expériences de pensées, mais pourrait également inclure les arguments informels (Mendelson 1990) ou les programmes informatiques¹³ (au sujet des preuves informatiques voir e.g. Horgan (1993)). Comme résumé par S.-J. Shin, Lemon et Mumma (2018), la question du raisonnement multi-modal est encouragée récemment en mathématiques et dans les autres sciences et a un impact et un écho grandissant pour de nombreuses autres disciplines, telle que la psychologie ou la pédagogie des mathématiques.

A mes yeux, le point le plus discutable de l’article de Brown (1997) n’est pas donné par sa volonté de ”réhabilitation” des figures dans le processus de preuve, mais par la lecture Platonicienne qu’il souhaite en faire. Cette position de l’auteur a été détaillée plus avant ultérieurement dans le livre Brown (2008). A ce sujet voir également Sherry (2008). De plus, comme soutenu dans une réponse directe à Brown, Folina (1999) montre que, à défaut de renforcer les arguments de Brown en faveur des figures comme preuve, vouloir à tout prix proposer une position Platoniste décrédibilise et rend instable cette position. En effet, l’auteur commence par affirmer solidement qu’il entend démontrer que les images peuvent servir de preuves. Par la suite, sa position s’affaiblit progressivement et il finit par conclure que les images sont des ”ouvertures vers le monde de Platon” permettant à ”l’œil de l’esprit” d’accéder à un diagramme mental pur et abstrait qui lui ferait office de preuve. Brown (1997) finit alors par conclure que les représentations joueraient un rôle analogue aux instruments en sciences expérimentales. On s’éloigne donc ici de la notion de preuve mathématique à proprement parler. On se retrouve alors à se demander si un instrument, comme un télescope, peut apporter une preuve en astronomie. Folina (1999) répond fermement non à cette question, mais la réponse paraît pourtant plus complexe. Tout d’abord, il est évident qu’un instrument en lui-même, en tant qu’objet – ou une figure seule – n’apporte aucune preuve. Je parle ici de l’acte d’observation à travers un instrument, ou l’acte d’observer une figure, comme le fait Brown (1997) même si il n’opère pas explicitement cette distinction. En prenant un cas d’école historique, demandons-nous alors si les astronomes et historiens des sciences pourraient s’accorder à affirmer qu’une proposition du type $p_1 =$ ”Il y a des tâches à la surface du soleil” ou $p'_1 =$ ”La lune a des cratères à sa surface”, peuvent être prouvées par l’observation directe de l’astre du jour¹⁴ ou de la Lune au télescope comme l’aurait fait Galilée^{15 16}. Autrement dit, *dans le cadre des sciences expérimentales, peut-on prouver une proposition uniquement par l’observation ou l’expérience ?*¹⁷ Je ne peux évidemment pas prétendre répondre à une telle question dans

13. Les programmes informatiques peuvent par ailleurs devenir largement non interprétables et non décomposables par l’utilisation des modèles de machine learning, s’éloignant toujours plus de l’idéal de la preuve formelle.

14. A ne pas reproduire chez soi !

15. Notons ici que d’autres observations des taches solaires précédaient celles de Galilée. Pour une discussion voir e.g. Casanovas (1997) et Dame (1966).

16. Voir par exemple le site de [Université de Strasbourg](#) : ”[Galilée a] pu prouver que la Lune n’était pas une sphère lisse mais qu’elle présentait des cratères”. S’agit-il d’un simple abus de langage ou reflète-il l’opinion générale ?

17. Attention : il faudrait distinguer ici observation et expérience (On ne garderait que observation dans

ce court essai, mais il me semble qu'un des nœuds du problème se trouve ici et que Brown répond implicitement à cette question par l'affirmative en comparant directement figures et preuves expérimentales. Il se confronte alors à de nombreux problèmes classiques des sciences empiriques comme celui de la possibilité de prouver par l'induction¹⁸ : toutes les courbes que je dessine satisfont au théorème des valeurs intermédiaires, est-il pour autant toujours vérifié ? (et identiquement avec les exemples des suites infinies). Comment donc, passer du particulier au général ? En bref, en proposant une lecture "d'empirisme mathématique", on en vient alors à transposer les grandes questions des sciences de la nature directement au cas des mathématiques.

Un bref survol de la littérature nous montre que pour des propositions de type p_1 ou p'_1 on parlera plutôt de "découverte" (bandes et satellites de Jupiter, cratères lunaires, phases de Venus etc) alors que la notion de preuve semble plutôt réservée pour des propositions de type p_2 = "*La Terre tourne sur elle-même*" (Burstyn 1962 ; Shea 1970) impliquant typiquement un lien avec la mécanique (comme les propositions énoncées dans Galileo Galilei (1632)) allant au-delà de la simple observation (voir e.g. la discussion dans Wallace (1992)). Une distinction si nette entre p_1 et p_2 et leurs preuves est elle justifiée ? Supposant qu'une observation fournisse une preuve de p_1 , elle apparaît comme une image pouvant avoir de nombreuses interprétations (peut-être n'est ce pas des tâches sur le soleil mais plutôt un problème de l'instrument ou le transit de Venus ?) alors qu'une preuve formelle de p_2 l'insère dans un cadre théorique beaucoup plus large. Exactement comme pour les figures et les preuves formelles. On pourrait chercher à apporter une preuve de p_1 dans un cadre interprétatif plus large en physique stellaire en utilisant des modèles de magnétohydrodynamique (Solanki 2003), apportant alors une preuve formelle de p_1 et l'insérant dans le même édifice théorique que p_2 ¹⁹. Identiquement, on pourrait envisager une preuve directe de la rotation de la Terre par un satellite géostationnaire²⁰. A une proposition physique donnée on pourrait donc considérer deux types de preuves (A supposer ici encore qu'une observation fournit bien une preuve). Il en irait alors de même pour les propositions mathématiques, auxquelles on peut associer des preuves de type "découverte" donné par exemple par les figures et des preuves de type formelles données par une suite de propositions logiques qui insèrent la proposition dans un cadre théorique plus large. C'est dans ce sens que je comprends la proposition de Brown (1997), et dans ce sens il ne semble pas complètement absurde d'effectuer un parallèle entre instruments et figures comme sources de preuves. En sciences naturelles, comme en mathématique, il pourrait alors bien exister deux types de preuves ou a minima deux types "d'accès" à une proposition : une preuve "directe" ou "empirique" donnée par l'observation, parfois trompeuse mais au fondement des théories et une preuve formelle insérant la proposition dans un cadre théorique, dont les axiomes sont trouvés a posteriori afin de pouvoir retrouver ces faits expérimentaux. En suivant encore Brown (1997), certaines propositions

le cas de l'astronomie). Ensuite, il faudrait discuter si les figures s'apparentent plus à des observations ou à des expériences. Afin de ne pas ouvrir la boîte de Pandore, je laisse ces points en suspens et n'opère pas ici de distinction.

18. que j'ai brièvement discuté [ici](#).

19. Il est intéressant de noter que Galilée a justement utilisé la validité de p_1 par l'observation pour chercher à prouver formellement p_2 . Voir à ce sujet Smith (1985).

20. Voir par exemple la vidéo du satellite Galileo (<https://svs.gsfc.nasa.gov/1373>). Il est cependant impossible de dire à la vue de la vidéo si la Terre tourne sur elle-même ou si c'est le satellite qui tourne autour de la Terre, affaiblissant notre argumentaire. On pourra facilement imaginer des propositions alternatives du type p'_2 = "*le son est une vibration de l'air*" s'insérant également dans un cadre théorique plus large et possédant pour autant des "preuves directes".

appartenant à un édifice théorique ne peuvent simplement pas avoir de preuve directe comme les figures géométriques en dimension 10 (Appendice C) ou l'intérieur des trous noirs en relativité générale. De plus, des propositions peuvent avoir des aspects fortement contre-intuitifs comme le paradoxe de Tarski-Banach ou la majorité de la physique quantique.

Plus avant dans sa réponse – et en lien direct avec notre discussion précédente – Folina (1999) reproche à Brown (1997) d'argumenter en faveur d'une proposition du type " $a = \text{il y a plus que les preuves formelles à la connaissance mathématiques}$ " plutôt que " $b = \text{les figures peuvent faire office de preuves}$ ". Alors que défendre a est une "preuve de bon sens", défendre b demanderait de définir clairement une conception alternative du concept de la preuve mathématique basée sur les figures, et prouvée équivalente ou supérieure à la preuve formelle. Cette remarque est en effet justifiée car Brown reste toujours relativement flou sur l'apport des figures à la preuve et le parallèle avec les sciences empirique que nous avons discuté plus haut soulève plus de questions qu'elle n'apporte de réponses. On peut alors chercher, pour des cas particuliers, des preuves de b afin de légitimer l'utilisation de certaines figures comme preuves.

Comme déjà évoqué en introduction, des branches entières des mathématiques comme la théorie des graphes ou la théorie des nœuds sont elles quasiment entièrement fondées sur l'utilisation de diagrammes. Dans ce cas, des relations claires entre propositions et figures sont établies au fondement de l'édifice théorique, de telle sorte qu'il n'existe aucune ambiguïté sur le rôle qu'ils peuvent jouer dans l'établissement d'une preuve (S. D. Toffoli et Giardino 2014), établissant b comme vrai par construction. En logique, Peirce (1932) a proposé les "graphes existentiels", systèmes de représentations graphiques prouvés purement équivalents à la logique propositionnelle (voir également Sun-joo Shin (1994) et Sun-Joo Shin (2002)). b peut également être prouvé en se concentrant sur certains cas particuliers, comme celui des "diagrammes commutatifs" utilisés en théorie des catégories (S. d. Toffoli 2017). Certains systèmes de raisonnement permettent donc de considérer b comme vrai et lever toute ambiguïté sur l'utilisation des figures dans les preuves.

Des tentatives de prouver b en définissant des systèmes de preuves fondés sur les figures ont été proposées plus récemment en géométrie plane par e.g. Miller (2007) et Mumma (2010), dans le cadre des éléments d'Euclide présentés en introduction (Sec. 1) (voir également Miller (2012) et la réponse de Mumma (2019)). Ces méthodes utilisent les propriétés topologiques des diagrammes en suivant la discussion ouverte par Manders (2008), qui avait déjà proposé une lecture validant l'utilisation des diagrammes dans les preuves des Elements.

Dans tous ces cas, les figures sont légitimées comme éléments de preuve par l'existence de relations spécifiques les reliant aux propositions, généralisant le cas de l'existence des homomorphismes et isomorphismes déjà discuté dans Brown (1997). Il faudra alors se demander comment contenir des cas de plus en plus généraux où de telles relations sont plus difficile voir impossible à mettre en évidence, pour pouvoir cerner précisément les limites de l'utilisation des figures comme preuves. Les cas de "récursions à l'infini" proposés par Brown (1997) fournissant un cas limite particulièrement intéressant.

La discussion est donc loin d'être close et il faudra examiner au cas par cas si on peut apporter ou non un argumentaire suffisamment convainquant pour amener preuve formelle et figures sur un "pied d'égalité". Quoiqu'il en soit, on ne peut que se réjouir du récent tournant en faveur d'une approche multimodale du raisonnement mathématique, qui enrichit grandement le contenu de la philosophie des mathématiques en proposant des questions auxquelles elle était autrefois aveugle.

Références

- Apostol, T. M. (1967). *Calculus, second edition, Volume one : One variable calculus, with an introduction to linear algebra*. Waltham, MA : Blaisdel.
- Bagaria, Joan (2023). « Set Theory ». In : *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Sous la dir. d'Edward N. Zalta et Uri Nodelman. Spring 2023. Metaphysics Research Lab, Stanford University.
- Barwise, Jon et John Etchemendy (1991). « Visual information and valid reasoning ». In.
- Beeson, Michael, Julien Narboux et Freek Wiedijk (oct. 2017). « Proof-checking Euclid ». In : *arXiv e-prints*. DOI : [10.48550/arXiv.1710.00787](https://doi.org/10.48550/arXiv.1710.00787). arXiv : [1710.00787](https://arxiv.org/abs/1710.00787) [cs.LO].
- Benacerraf, Paul (1984). « What numbers could not be ». In : *Philosophy of Mathematics : Selected Readings*. Sous la dir. de Paul Benacerraf et Hilary Editors Putnam. 2^e éd. Cambridge University Press, p. 272-294. DOI : [10.1017/CB09781139171519.015](https://doi.org/10.1017/CB09781139171519.015).
- Bolzano, B. (1817). *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewdhren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege*. Prague, Gottlieb Hass.
- (1969/87). *Gesamtausgabe, Vols. 1-15*. Stuttgart, Fromman.
- Bos, Henk J. M. (2001). « The legitimation of geometrical procedures before 1590 ». In : *Redefining Geometrical Exactness : Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. New York, NY : Springer New York, p. 23-36. ISBN : 978-1-4613-0087-8. DOI : [10.1007/978-1-4613-0087-8_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0087-8_2). URL : https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0087-8_2.
- Boyer, Carl B. (1949). *The History of the Calculus*. Dover publications, inc. New York (reprint). URL : <https://archive.org/details/the-history-of-the-calculus-carl-b.-boyer/page/129/mode/2up>.
- Brown, James Robert (1997). « Proofs and Pictures ». In : *The British Journal for the Philosophy of Science* 48.2, p. 161-180. ISSN : 00070882, 14643537. URL : <http://www.jstor.org/stable/687743> (visité le 23/06/2023).
- (2008). *Philosophy of Mathematics : A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures (2nd edition)*. New York : Routledge.
- Burstyn, Harold L. (1962). « Galileo's Attempt to Prove That the Earth Moves ». In : *Isis* 53.2, p. 161-185. ISSN : 00211753, 15456994. URL : <http://www.jstor.org/stable/228028> (visité le 11/07/2023).
- Buzzoni, Marco (2022). « Are There Mathematical Thought Experiments? » In : *Axiomathes* 32.1, p. 79-94. DOI : [10.1007/s10516-022-09641-3](https://doi.org/10.1007/s10516-022-09641-3).
- Casanovas, J. (jan. 1997). « Early Observations of Sunspots : Scheiner and Galileo ». In : *1st Advances in Solar Physics Euroconference. Advances in Physics of Sunspots*. Sous la dir. de B. Schmieder, J. C. del Toro Iniesta et M. Vazquez. T. 118. Astronomical Society of the Pacific Conference Series, p. 3.
- Dame, Bernard (1966). « Galilée et les taches solaires (1610-1613) ». In : *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications* 19.4, p. 307-370. ISSN : 00487996, 19696582. URL : <http://www.jstor.org/stable/23905708> (visité le 23/07/2023).
- Easwaran, Kenny et al. (2021). « Infinity ». In : *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Sous la dir. d'Edward N. Zalta. Winter 2021. Metaphysics Research Lab, Stanford University.
- Euclide d'Alexandrie (-300 av J.C.). *Les Éléments de Géométrie d'Euclide*. Wentworth Press, réédition 2018.

- Ferreirós, José (jan. 2007). *Labirynt of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*. ISBN : 978-3-7643-8349-7. DOI : [10.1007/978-3-7643-8350-3](https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8350-3).
- Folina, Janet (1999). « Discussion. Pictures, Proofs, and 'Mathematical Practice' : Reply to James Robert Brown ». In : *British Journal for the Philosophy of Science* 50.3, p. 425-429. DOI : [10.1093/bjps/50.3.425](https://doi.org/10.1093/bjps/50.3.425).
- Galileo Galilei (1632). *"Dialogue Concerning the Two Chief World Systems"*.
- Horgan, John (1993). « THE DEATH OF PROOF ». In : *Scientific American* 269.4, p. 92-103. ISSN : 00368733, 19467087. URL : <http://www.jstor.org/stable/24941653> (visité le 02/07/2023).
- Kant, E. (1781). *Critique de la Raison pure*.
- Kitcher, Philip (1975). « Bolzano's Ideal of Algebraic Analysis ». In : *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 6.3, p. 229-269. DOI : [10.1016/0039-3681\(75\)90024-2](https://doi.org/10.1016/0039-3681(75)90024-2).
- Kline, Morris (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, Oxford.
- Lakatos, I. (1974). *Preuves et réfutations : Essai sur la logique de la découverte mathématique*. Sous la dir. d'Éditions Hermann.
- Lomas, Dennis (2002). « What Perception is Doing, and What It is Not Doing, in Mathematical Reasoning ». In : *British Journal for the Philosophy of Science* 53.2, p. 205-223. DOI : [10.1093/bjps/53.2.205](https://doi.org/10.1093/bjps/53.2.205).
- Manders, Kenneth (2008). « The Euclidean Diagram ». In : *The Philosophy of Mathematical Practice*. Sous la dir. de Paolo Mancosu. Oxford University Press, p. 80-133.
- Mendelson, Elliott (1990). « Second Thoughts about Church's Thesis and Mathematical Proofs ». In : *The Journal of Philosophy* 87.5, p. 225-233. ISSN : 0022362X. URL : <http://www.jstor.org/stable/2026831> (visité le 27/07/2023).
- Miller, Nathaniel (2007). *Euclid and His Twentieth Century Rivals : Diagrams in the Logic of Euclidean Geometry*. Center for the Study of Language et Inf.
- (2012). « On the Inconsistency of Mumma's Eu ». In : *Notre Dame Journal of Formal Logic* 53.1, p. 27-52. DOI : [10.1215/00294527-1626509](https://doi.org/10.1215/00294527-1626509).
- Mumma, John (2010). « Proofs, Pictures, and Euclid ». In : *Synthese* 175.2, p. 255-287. DOI : [10.1007/s11229-009-9509-9](https://doi.org/10.1007/s11229-009-9509-9).
- (2019). « The Eu Approach to Formalizing Euclid : A Response to ?on the Inconsistency of Mumma's Eu ? ». In : *Notre Dame Journal of Formal Logic* 60.3, p. 457-480. DOI : [10.1215/00294527-2019-0012](https://doi.org/10.1215/00294527-2019-0012).
- Nagel, Ernest (1939). « The Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry ». In : *Osiris* 7, p. 142-223.
- Parsons, Charles (1979). « Mathematical Intuition ». In : *Proceedings of the Aristotelian Society* 80, p. 145-168. ISSN : 00667374, 14679264. URL : <http://www.jstor.org/stable/4544956> (visité le 29/06/2023).
- Peirce, Charles Sanders (1932). *Collected Papers*. Cambridge : Harvard University Press.
- Poincaré, H. (1902). *La Science et l'Hypothèse*.
- Schuller, FP (2016). *Lectures on the Geometric Anatomy of Theoretical Physics*.
- Shea, W. R. J. (1970). « Galileo's Claim to Fame : The Proof That the Earth Moves from the Evidence of the Tides ». In : *The British Journal for the History of Science* 5.2, p. 111-127. ISSN : 00070874, 1474001X. URL : <http://www.jstor.org/stable/4025413> (visité le 11/07/2023).
- Sherry, David (2008). « The Role of Diagrams in Mathematical Arguments ». In : *Foundations of Science* 14.1-2, p. 59-74. DOI : [10.1007/s10699-008-9147-6](https://doi.org/10.1007/s10699-008-9147-6).

- Shin, Sun-Joo (2002). *The Iconic Logic of Peirce's Graphs*. Cambridge, Mass. : MIT Press.
- Shin, Sun-joo (1994). « Peirce and the Logical Status of Diagrams ». In : *History and Philosophy of Logic* 15.1, p. 45-68. DOI : [10.1080/01445349408837224](https://doi.org/10.1080/01445349408837224).
- Shin, Sun-Joo, Oliver Lemon et John Mumma (2018). « Diagrams ». In : *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Sous la dir. d'Edward N. Zalta. Winter 2018. Metaphysics Research Lab, Stanford University.
- Smith, A. Mark (1985). « Galileo's Proof for the Earth's Motion from the Movement of Sunspots ». In : *Isis* 76.4, p. 543-551. ISSN : 00211753, 15456994. URL : <http://www.jstor.org/stable/233026> (visité le 25/07/2023).
- Solanki, Sami K. (jan. 2003). « Sunspots : An overview ». In : *The Astronomy and Astrophysics Review* 11.2-3, p. 153-286. DOI : [10.1007/s00159-003-0018-4](https://doi.org/10.1007/s00159-003-0018-4).
- Toffoli, Silvia de (2017). « ?Chasing? the Diagram—the Use of Visualizations in Algebraic Reasoning ». In : *Review of Symbolic Logic* 10.1, p. 158-186. DOI : [10.1017/s1755020316000277](https://doi.org/10.1017/s1755020316000277).
- Toffoli, Silvia De (2022). « What Are Mathematical Diagrams? » In : *Synthese* 200.2, p. 1-29. DOI : [10.1007/s11229-022-03553-w](https://doi.org/10.1007/s11229-022-03553-w).
- Toffoli, Silvia De et Valeria Giardino (2014). « Forms and Roles of Diagrams in Knot Theory ». In : *Erkenntnis* 79.4, p. 829-842. DOI : [10.1007/s10670-013-9568-7](https://doi.org/10.1007/s10670-013-9568-7).
- Wagon, Stan (2012). *The Banach-Tarski Paradox*. Cambridge University Press.
- Wallace, W. A. (1992). *Galileo's Logic of Discovery and Proof: The Background, Content, and Use of His Appropriated Treatises on Aristotle's Posterior Analytics (Reprint)*. Boston Studies in the Philosophy et History of Science, 137.
- Wittgenstein, L. (1921). *Tractatus Logico-Philosophicus*.

A Définitions complémentaires

Je propose ici des définitions de termes techniques nécessaires à la bonne compréhension de l'article et de la note de lecture. Ces définitions sont courtes et par essence limitées et ne visent qu'à aider la compréhension de la présente discussion.

- **Induction** : Raisonnement permettant d'inférer des lois générales à partir de cas particuliers. Les sciences de la nature sont par nature inductives en inférant des lois fondamentales à partir d'expériences répétées.
- **Deduction** : Raisonnement inférant de nouvelles propositions comme conclusions d'inférences logiques à partir de prémisses. La conclusion apparaît donc comme une conséquence logique nécessaire des prémisses. La logique et les mathématiques sont traditionnellement considérées comme des sciences déductives. Les théorèmes étant alors inférés à partir des axiomes à l'aide de preuves formelles telles que définies en introduction de la présente note de lecture.
- **Isomorphisme** : Un isomorphisme ϕ entre deux ensemble A et B munis de structures est une application $\phi : A \rightarrow B$ qui est bijective et qui préserve la structure. ϕ est bijective si chaque antécédent par ϕ a une unique image, c'est à dire $\forall x \in A, !\exists B$ tel que $\phi(x) = y$. ϕ préserve la structure si $\forall x_1, x_2 \in A, \phi(x_1 *_A x_2) = f(x_1) *_B \phi(x_2)$ pour toute opération interne $*_A$ définie sur A et x_B sur B .
- **Homomorphisme** : Un homomorphisme est une application entre deux ensembles munis de structures A et B est une application préservant la structure. Elle n'est pas nécessairement bijective. En ce sens, un isomorphisme est un homomorphisme bijectif.
- **Platonisme** : Dans sa version la plus forte, le Platonisme, attribué à Platon, affirme l'existence des objets mathématiques (réalisme) dans un domaine d'existence différent de celui du monde sensible et des créations de l'esprit humain.

B Exemples en théorie des nombres

Considérons le théorème suivant :

Théorème 4. *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Alors :*

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \sum_{m=1}^n (2m - 1) = n^2 \quad (1)$$

Une preuve généralement est fournie par récurrence (appelée aussi preuve par induction²¹). Notons qu'une preuve par récurrence n'est *pas* une preuve formelle. On peut argumenter qu'elle fait déjà appel à l'intuition mathématique et ne se résume pas à de la logique pure. A ce sujet voir e.g. Poincaré (1902). Cependant, une preuve par induction est traditionnellement reconnue comme valable, à un niveau supérieur de celui du diagramme.

Démonstration.

21. Nous éviterons d'utiliser ce nom ici pour éviter la confusion avec l'induction telle que définie en appendice A.

— Initialisation :

$$((2 \times 1) - 1) = 1^2. \quad (2)$$

La proposition est vraie au rang $m = 1$.

— Admettons que la proposition soit vraie jusqu'au rang m . Vérifions qu'elle est toujours valide au rang $m + 1$. Pour cela ajoutons $2(m + 1) - 1$ de chaque coté de l'égalité :

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2m - 1) + 2(m + 1) - 1 = m^2 + 2(m + 1) - 1. \quad (3)$$

Après simplification, on obtient

$$\begin{aligned} m^2 + 2(m + 1) - 1 &= m^2 + 2m + 2 - 1 \\ &= m^2 + 2m + 1 \\ &= (m + 1)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Si la proposition est vraie au rang m , elle est donc aussi vraie au rang $m + 1$.

— La proposition est vraie au rang $m = 1$ et au rang $m + 1$. Elle sera donc toujours vraie jusqu'au rang n . Cela conclut la preuve par récurrence. \square

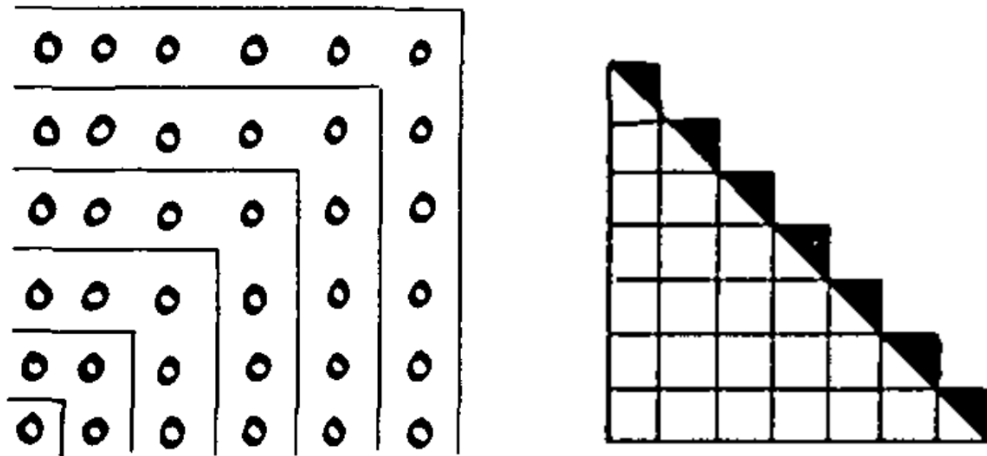


FIGURE 3 – Illustration des théorèmes 4 (gauche) et 5 (droite). Dans Brown (1997).

Considérons désormais la partie gauche de la figure 3. Elle est formée de carrés emboîtés les uns dans les autres. Chaque carré, de longueur m , représente l'état de la somme au rang m , et ajoute $2m - 1$ éléments au carré précédent (1,3,5 ...). Au rang m , le carré (de longueur m) contient bien m^2 éléments (comme indiqué par sa forme de carré!). Ici encore, la figure donne une intuition forte du problème considéré et peut faire office de preuve. La vérité du théorème 4 apparaît comme évidente et peut être saisie rapidement avec un minimum de bagage mathématique.

Tournons nous désormais vers

Théorème 5. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Alors :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{m=1}^n m = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}. \quad (5)$$

Comme dans le cas précédent, une preuve peut être dérivée par récurrence

Démonstration.

— Initialisation :

$$1 = \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2}. \quad (6)$$

La proposition est vraie au rang $m = 1$.

— Admettons que la proposition soit vraie jusqu'au rang m . Vérifions qu'elle est toujours valide au rang $m+1$. Pour cela ajoutons $m+1$ de chaque côté de l'égalité :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 \cdots + m + (m+1) &= \frac{m^2}{2} + \frac{m}{2} + (m+1) \\ &= \frac{m^2}{2} + \frac{m}{2} + \frac{2m}{2} + \frac{2}{2} \\ &= \frac{m^2 + 2m + 1}{2} + \frac{(m+1)^2}{2} + \frac{m+1}{2}. \end{aligned}$$

Si la proposition est vraie au rang m , elle est donc aussi vraie au rang $m+1$.

— La proposition est vraie au rang $m = 1$ et au rang $m+1$. Elle sera donc toujours vraie jusqu'au rang n . Cela conclut la preuve par récurrence. \square

Considérons désormais la partie droite de la figure 3. Elle représente un carré de n petits carrés de côté, qui a été coupé en deux selon l'antidiagonale et auquel on a rajouté les demi cubes manquants. Le nombre total de petits carrés contenu dans la figure est donné par la somme $1 + 2 + 3 + \cdots + n$, obtenue en ajoutant itérativement les petites lignes de petits carrés en partant d'en bas à gauche de la figure jusqu'à la diagonale. La figure totale contient également bien $n^2/2$ éléments (demi carré) auquel on ajoute la contribution en $n/2$ des demi petits carrés formant la diagonale (en noir).

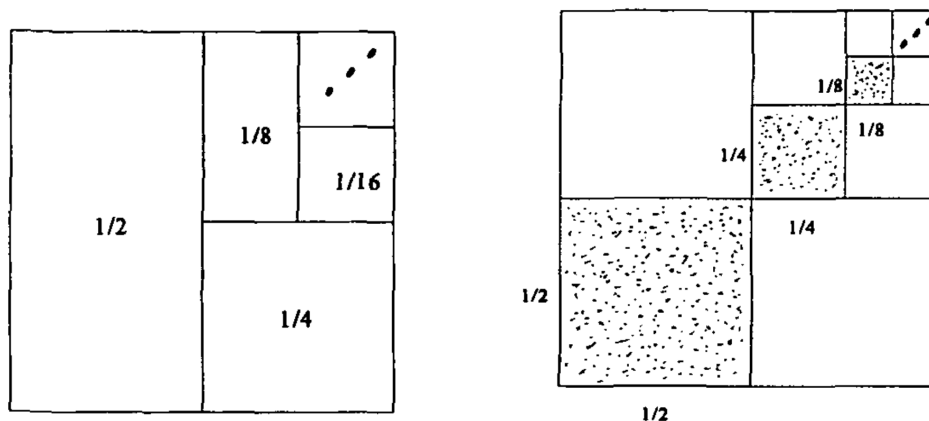


FIGURE 4 – Illustration des théorèmes 6 (gauche) et 7 (droite). Dans Brown (1997).

Le troisième exemple est donné par le théorème suivant :

Théorème 6.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 1. \quad (7)$$

Démonstration. De par la complexité de cette preuve, nous ne donnons ici que les étapes de raisonnement nécessaires à sa dérivation en utilisant les techniques $\epsilon - \delta$. Soit les sommes partielles définies par

$$s_n = \sum_{m=1}^n \frac{1}{2^m} \quad (8)$$

Il est possible de montrer par récurrence en suivant les preuves précédentes que

$$s_n = \frac{2^n - 1}{2^n} \quad (9)$$

Pour prouver le théorème, on cherche donc à montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$. Or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad (\forall \epsilon)(\exists N) n > N \rightarrow \left| 2^n - \frac{1}{2^n} - 1 \right| < \epsilon. \quad (10)$$

On peut montrer que

$$\begin{aligned} \left| 2^n - \frac{1}{2^n} - 1 \right| < \epsilon &\rightarrow \left| \frac{-1}{2^n} \right| < \epsilon \\ &\rightarrow 2^n \leq \frac{1}{\epsilon} \\ &\rightarrow \log_2(1/\epsilon) \leq n \end{aligned} \quad (11)$$

On définit alors $N(\epsilon) = \log_2(1/\epsilon)$, d'où

$$n > N(\epsilon) \rightarrow \left| 2^n - \frac{1}{2^n} - 1 \right| < \epsilon \quad (12)$$

prouvant donc que la somme des sommes partielles s_n vaut bien 1. \square

Le diagramme correspondant est donné sur la partie gauche de la figure 4. On voit un carré de côté 1 et de surface 1 découpé en surface plus petites occupant des fractions de la surface totale. Les fractions des petites surfaces sont graduellement plus petites en suivant l'ordre imposé par la somme $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$. En prolongeant le découpage par l'imagination, on comprend bien que la somme des carrés de taille inférieure remplira complètement la surface du grand carré dans un processus "fractal".

Enfin, le dernier théorème est le suivant

Théorème 7.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^m} = \frac{1}{3}. \quad (13)$$

La preuve traditionnelle est identique à celle du théorème 6 et ne sera pas détaillée ici. La figure correspondante est donnée sur la partie droite de la figure 4. Identiquement au théorème 6, le découpage d'un carré en sous parties plus petites nous donne l'intuition de la vérité du théorème.

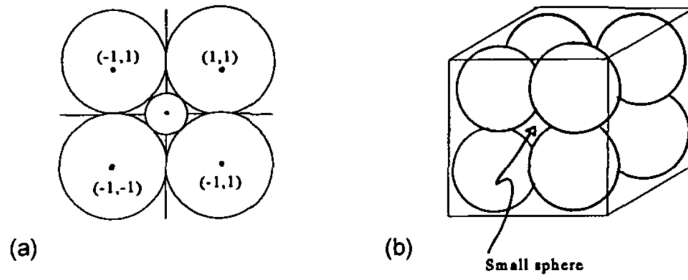


FIGURE 5 – Cercles et sphères imbriqués. Dans Brown (1997).

C Exemple d’une preuve visuelle trompeuse

Théorème 8. *Comme sur la partie gauche de la figure 5, considérons 4 cercles de rayon 1 sur le plan en positions $(\pm 1, \pm 1)$. Soit s_1 un cercle centré sur l’origine dont le rayon est suffisamment grand pour qu’il entre en contact avec les 4 cercles. Finalement, soit une boîte B tracée autour des 4 grands cercles en contact avec eux (ici s’étirant donc de -2 à $+2$). Alors, s_1 est incluse dans B .*

La simple vue de la partie gauche de la figure 5 nous convainc sans peine de la vérité du théorème 8. Maintenant considérons sa généralisation en dimensions supérieures :

Théorème 9. *Soit un espace plan de dimension d . Soient des sphères de dimension $(d-1)$ et de rayon 1 centrés sur chacune des valeurs possibles de $(\pm 1, \pm 1, \pm 1 \dots, \pm 1)$. Soit s_{d-1} une $(d-1)$ -sphère centrée sur l’origine dont le rayon est suffisamment grand pour qu’il entre en contact avec les autres $(d-1)$ -sphères. Soit enfin une boîte B tracée autour des $4d$ grandes $(d-1)$ -sphères et en contact avec elles (elle croise chacun des axes en ± 2). Alors, s_d est incluse dans B .*

Malgré sa forme quelque peu indigeste, nous pouvons utiliser l’intuition obtenue sur sa version en 2 dimensions (théorème 8). Aussi loin que nos sens puissent nous amener, on peut représenter la situation en 3 dimensions sur la partie droite de la figure 5. On est alors facilement convaincu de la vérité du théorème 9.

Surprenamment, ce théorème n’est plus vrai pour une dimension plus grande que $d = 10$. En effet, la distance entre l’origine et le centre des grandes sphères est donnée par le théorème de Pythagore $\sqrt{(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + \dots} = \sqrt{d}$. Chaque sphère a un rayon de 1, de manière à ce que la sphère centrale s_{d-1} doit avoir un rayon de $\sqrt{d} - 1$ pour entrer en contact avec elles. Pour $d \leq 10$, $\sqrt{d} - 1 \leq 2$, et la sphère centrale s_{d-1} doit s’échapper de B ! Ce résultat viole donc profondément l’intuition 3 dimensionnelle acquise par les schémas.